Villámkérdések 1, megoldásokkal. BME, Mat. B3, 2007 Dec. 21.[1]

1. Számítsuk ki a $v(x,y,z) = [xy^2, yz^2, zx^2]$ függvény divergenciáját. *2; (Szept. 18).*

$$div(v)(x,y,z) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3 = y^2 + z^2 + x^2.$$

2. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ sor? Indokoljunk. *4; (Szept. 21, Szept. 25).*

$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ és itt a jobboldal egy $\frac{1}{2}$ hányadosú, tehát konvergens mértani sor. Így a majoránskritérium miatt az eredeti sor is konvergens. (Alkalmazható lett volna a hányados- vagy akár a gyökkritérium is.)

3. Legyenek f és g azok a 2π szerint periodikus függvények, melyekre teljesül, hogy minden $x \in [-\pi, \pi)$-re $f(x) = 1$ és $g(x) = x$. Állapítsuk meg, hogy f és g ortogonálisak-e. Indokoljunk. *8; (Okt. 5).*

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ tehát f és g ortogonális függvények.

4. Számítsuk ki $(-1)^i$ algebrai alakját. *(9; (Okt. 9).*

$-1 = 1(cos(\pi) + isin(\pi)) = e^{i\pi}$ tehát $(-1)^i = (e^{i\pi})^i = e^{i^2\pi} = e^{-\pi}$.

5. Adjuk meg $f(z) = sin(\frac{1}{z})$ reziduumát az origóban. *9,13; (Okt. 9, Okt. 27).*

$sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ tehát $sin(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{(-1)^0}{1!} z^{-1} + \cdots$.
Így a reziduum $\frac{(-1)^0}{1!} = 1$.

6. Írjuk le a konvolúció-tételt. *14; (Okt. 30).*

Ha f és g Laplace-transzformálható függvények, akkor $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$.

7. Írjuk le a Cauchy-Peano tételt. *15; (Nov. 6).*

Ha f kétváltozós folytonos függvény, akkor az $y' = f(x,y)$ diff.egyenletnek van megoldása.

8. Adjuk meg az $y^{(2007)} = 0$ diff.egyenlet egy alaprendszerét. *18; (Nov. 20).*

$p(\lambda) = \lambda^{2007}$; ennek nulla 2007-szeres valós gyöke, tehát egy alaprendszer: $\{e^{0x}, xe^{0x}, x^2e^{0x}, ..., x^{2006}e^{0x}\} = \{1, x, x^2, ..., x^{2006}\}$ (ez közvetlenül is látszik).

[1] A kérdések után *X; (Y,Z)* azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) kell(ene) tudni a választ...