Villámkérdések 2, megoldásokkal. **BME, Mat. B3, 2008 Jan. 4.**[1]

1. Írjuk le a Gauss-Osztrogradszkij-tétel állítását. *3; (Szept. 18).*

   Ha $\mathcal{F}$ kifele irányított, zárt felület és v egy vektor-vektor függvény, akkor
   $\int_{\mathcal{F}\ felülete} v = \int_{\mathcal{F}\ belseje} div(v)$, feltéve, hogy mindkét integrál létezik.

2. Benne van-e $\frac{\pi}{4}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} sin^n(x)$ függvénysor konv.-halmazában? *4,6; (Szept. 21-28).*

   $\sum_{n=1}^{\infty} sin^n(\frac{\pi}{4}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^n}$, ami egy 1-nél kisebb hányadosú, tehát konvergens mértani sor. Ezért $\frac{\pi}{4}$ benne van a konvergenica-halmazban.

3. Legyen $f(z) = e^z$. Határozzuk meg f 1 körüli Taylor-sorában $(z-1)^{2008}$ együtthatóját. *7; (Okt. 2).*

   $f(z) = f'(z) = ... = f^{(2008)}(z)$ ezért a keresett együttható $\frac{f^{(2008)}(1)}{2008!} = \frac{e^1}{2008!}$.

4. Legyen $u(x,y) = xe^y$ és $v(x,y) = e^x$. Kielégíti-e u, v a Cauchy-Riemann-egyenleteket? *10; (Okt. 12)*

   Nem, mert $\partial_x u(x,y) = e^y$, $\partial_y v(x,y) = 0$, és ezért $\partial_x u(x,y) \neq \partial_y v(x,y)$.

5. Számítsuk ki: $\int_{|z|=1} e^{e^z} dz$ (a görbe irányítása pozitív). *11; (Okt. 16).*

   Mivel e^{e^z} az egész komplex síkon reguláris, Cauchy alaptétele szerint a kérdéses integrál nulla.

6. Írjuk le két függvény konvolúciójának definícióját. *14; (Okt. 30).*

   $(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds.$

7. Van-e megoldása az $y' = |sin(sin(y)) - x^4y^3|$ diff.egyenletnek? *15; (Nov. 6).*

   Mivel a jobboldal folytonos függvény, a Cauchy-Peano-tétel szerint van megoldás.

8. Hány elemű az $y^{(5)} - 4y' + 2y = 0$ diff.egyenlet egy alaprendszere? Indokuljunk. *18; (Nov. 13).*

   A diff.egyenlet 5-ödfokú, tehát alaprendszerei 5 eleműek.

---
[1] A kérdések után *X; (Y,Z)* azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) kell(ene) tudni a választ...