Villámkérdések 3, megoldásokkal. BME, Mat. B3, 2008 Jan. 7.[1]

1. Írjuk le a Green-tétel állítását. *3; (Szept. 18).*

   Ha $v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ és $\mathcal{F}$ zárt síkgörbe, akkor $\int_{\mathcal{F}} v = \int_{\mathcal{F}\ belseje} \partial_x v_2 - \partial_y v_1$ (feltéve, hogy mindkét integrál létezik).

2. Legyen $f_n = \dfrac{2nx}{n+x^2}$. Adjuk meg az (f_n) függvénysorozat határfüggvényét. *6; (Szept. 28).*

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{n+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x}{1+\frac{x^2}{n}} = 2x.$$

3. Legyenek f és g azok a 2π szerint periodikus függvények, melyekre teljesül, hogy $\forall x \in [0, 2\pi)$ $f(x) = 0$, $g(x) = x$. Számítsuk ki f és g távolságát. *8; (Okt. 5).*

   $$d(f,g) = \sqrt{\int_0^{2\pi} (f(x) - g(x))^2 dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi} x^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\frac{8\pi^3}{3}}.$$

4. Adjuk meg algebrai alakban: $e^{\frac{i\pi}{2}}$. *9; (Okt. 9).*

   Az Euler-összefüggés szerint $e^{\frac{i\pi}{2}} = cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{\pi}{2}) = 0 + i1 = i$.

5. Számítsuk ki: $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$ (a görbe irányítása pozitív). *12; (Okt. 26).*

   Cauchy integrálformulája szerint $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = 2i\pi(e^z)|_{z=0} = 2i\pi$.

6. Mennyi $\mathcal{L}(f'; p)$, ha $f(0) = 1$ és $\mathcal{L}(f; p) = \dfrac{1}{p^2}$? *14; (Okt. 30).*

   $$\mathcal{L}(f'; p) = p \cdot \mathcal{L}(f; p) - f(0) = \frac{p}{p^2} - 1 = \frac{1}{p} - 1.$$

7. Adjuk meg a szétválasztható változójú diff.egyenletek definícióját. *16; (Nov. 6).*

   $y' = f(x, y)$ szétválasztható változójú diff.egyenlet, ha vannak olyan egyváltozós g, h függvények, melyekre $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$.

8. Lehet-e $\{e^{2x},\ xe^{2x},\ x^2e^{2x}\}$ egy másodrendű lineáris diff.egyenlet egy alaprendszere? Indokuljunk. *18; (Nov. 13).*

   Nem, mert másodrendű lineáris diff.egyenletek alaprendszerei kételeműek.

[1] A kérdések után *X; (Y,Z)* azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) kell(ene) tudni a választ...