Villámkérdések 4, megoldásokkal. BME, Mat. B3, 2008 Jan. 11.[1]

1. Legyen $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ háromszor deriválható. Igazoljuk, hogy $div(rot(v)) = 0$. *2; (Szept. 18).*

$$div(rot(v)) = div\ det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \partial_x(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) - \partial_y(\partial_x v_3 - \partial_z v_1) + \partial_z(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) = 0.$$

2. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ sor? Indokoljunk. *5; (Szept. 25).*

Pl. gyökkritériummal: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$.
Tehát a sor konvergens.

3. Adjuk meg az összegfüggvényét: $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$. *4; (Szept. 21).*

Ez egy mértani sor, $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^3)^n = \frac{1}{1-x^3}$.

4. Harmónikus-e az $f(x, y) = xy$ függvény ? Indokoljunk. *10; (Okt. 12).*

$\partial_x\partial_x(f)(x, y) = 0$, $\partial_y\partial_y(f)(x, y) = 0$, a Laplace-egyenletbe helyettesítve $\partial_x\partial_x(f) + \partial_y\partial_y(f) = 0$, azaz f harmónikus.

5. Számítsuk ki: $\int_{|z|=1} \frac{cos(z)}{z} dz$ (a görbe irányítása pozitív). *12; (Okt. 26).*

Cauchy integrálformulája szerint $\int_{|z|=1} \frac{cos(z)}{z} dz = 2i\pi(cos(z))|_{z=0} = 2i\pi$.

6. Írjuk le a Laplace-transzformációra vonatkozó hasonlósági tételt. *14; (Nov. 6).*

$$\mathcal{L}(f(kt); p) = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f; \frac{p}{k}).$$

7. Adjuk meg az egzakt diff.egyenletek definícióját. *17; (Nov. 9 - Nov. 13).*

$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ diff.egyenlet egzakt, ha $\partial_y P = \partial_x Q$.

8. Adjuk meg egy próbafüggvényét: $y'' + 2y' + y = x^3 e^{-x}$. *19; (Nov. 23).*

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, ennek -1 kétszeres gyöke,
így $y_{i,p} = x^2 e^{-x}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3)$.

[1] A kérdések után *X; (Y,Z)* azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) kell(ene) tudni a választ...