Villámkérdések 5, megoldásokkal. BME, Mat. B3, 2008 Jan. 14.[1]

1. Legyen K_h a $P = (1, 2, 3)$ középpontú, tengelypárhuzamos, h élhosszúságú kocka felülete. Számítsuk ki: $\lim_{h\to 0} \int_{K_h} [x^2, 3, z]$. *2; (Szept. 18).*

   $\lim_{h\to 0} \int_{K_h} [x^2, 3, z] = div([x^2, 3, z])(P) = (\partial_x(x^2) + \partial_y(3) + \partial_z(z))(P) = 3.$

2. Írjuk le az integrálkritériumot. *5; (Szept. 21).*

   Ha $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$ monoton csökkenő, csupa nemnegatív értéket felvevő függvény, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ és $\int_1^{\infty} f(x)dx$ egyszerre konvergens.

3. Eleme-e e^{-1} a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ln^n(x)}{n}$ függvénysor konvergencia-halmazának? Indokoljunk. *5,6; (Szept. 25, Szept. 28).*

   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ln^n(e^{-1})}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ egy Leibniz-sor; konvergenciájához elég, hogy $(\frac{1}{n})$ monoton csökkenőleg tartson nullához. Ez teljesül, így e^{-1} eleme a konv.-halmaznak.

4. Számítsuk ki e^{2008i} abszolút értékét. *9; (Okt. 9).*

   Az Euler-összefüggés szerint $e^{2008i} = cos(2008)+isin(2008)$; ennek absz.-értéke 1.

5. Számítsuk ki $f(z) = \frac{sin(z)}{z^2}$ reziduumát 0-ban. *9,13; (Okt. 9, Okt. 27).*

   $sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ tehát $\frac{sin(z)}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \frac{(-1)^0}{1!} z^{-1} + \cdots$.

   Így a reziduum $\frac{(-1)^0}{1!} = 1$.

6. Mennyi $\mathcal{L}(f * f)$, ha $\mathcal{L}(f) = 1$? Indokoljunk. *14; (Okt. 30).*

   A konvolúció-tétel szerint $\mathcal{L}(f * f) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(f) = 1 \cdot 1 = 1$.

7. Írjuk le a Picard-Lindelöf unicitástételt. *15; (Nov. 6).*

   Ha a kétváltozós f függvény folytonos a korlátos, zárt D-n, és eleget tesz a Lipschitz feltételnek, akkor az $y' = f(x, y)$ diff.egyenlet minden D-hez tartozó kezdetiérték-problémája egyértelműen oldható meg.

8. Adjuk meg egy próbafüggvényét: $y'' - 2y' + y = x^2e^{-x}$. *19; (Nov. 23).*

   $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, ennek -1 nullaszoros gyöke, így $y_{i,p} = x^0e^{-x}(A+Bx+Cx^2)$.

[1] A kérdések után *X; (Y,Z)* azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) kell(ene) tudni a választ...