Villámkérdések 6, megoldásokkal. **BME, Mat. B3, 2008 Jan. 18.**[1]

1. Legyen $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $v(x,y,z) = [y,z,x]$ és legyen $\mathcal{G}$ az origó középpontú, 1 sugarú gömb (kifele irányított) felszíne. Számítsuk ki: $\int_{\mathcal{G}} v$. *2,3; (Szept. 18).*

   $div(v) = \partial_x(y) + \partial_y(z) + \partial_z(x) = 0$, így a Gauss-Osztrogradszkij tétel szerint
   $$\int_{\mathcal{G}} v = \int_{\mathcal{G}\ belseje} div(v) = \int_{\mathcal{G}\ belseje} 0 = 0.$$

2. Írjuk le a majoránskritériumot. *4; (Szept. 25).*

   Ha (véges sok kivétellel) $|a_n| \le b_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konv., akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ abszolút konv.

3. Adjuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$ függvénysor összegfüggvényét. *4; (Szept. 21).*

   Ez egy mértani sor. Ha $|e^x| < 1$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^x)^n = \frac{1}{1-e^x}$.

4. Számítsuk ki π^i képzetes részét. *9; (Okt. 9).*

   $\pi^i = e^{i ln(\pi)} = cos(ln(\pi)) + isin(ln(\pi))$, tehát a képzetes rész $sin(ln(\pi))$.

5. Írjuk le a Reziduum-tételt. *13; (Okt. 27).*

   Ha $\mathcal{G}$ önmagát át nem metsző, (pozitív irányítású) zárt görbe a komplex síkon, f reguláris $\mathcal{G}$-n és a $z_1, ..., z_n$ pontok kivételével $\mathcal{G}$ belsejében, akkor $\int_{\mathcal{G}} f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_f(z_i)$.

6. Mennyi $f(0)$, ha f folytonos 0-ban és $\mathcal{L}(f;p) = p$, $\mathcal{L}(f';p) = p^2 - 1$? *14; (Okt. 30).*

   $p^2 - 1 = \mathcal{L}(f';p) = p\mathcal{L}(f;p) - f(0) = p^2 - f(0)$ azaz $f(0) = 1$.

7. Egzakt-e a harmadrendű $2xy + x^2y''' = 0$ diff.egyenlet? *17; (Nov. 9,13).*

   Nem, mert az egzakt egyenletek elsőrendűek.

8. Adjunk meg egy állandó együtthatós, homogén lineáris diff.egyenletet, melynek $\{e^{3x},\ xe^{3x}\}$ egy alaprendszere. *18; (Nov. 20).*

   3 kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak: $p(\lambda) = (\lambda-3)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$, így a diff.egyenlet: $y'' - 6y' + 9y = 0$.

---

[1] A kérdések után *X; (Y,Z)* azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) kell(ene) tudni a választ...