

Villámkérdések 9, megoldásokkal. BME, Mat. B3, 2008 Jan. 28.¹

1. Írjuk le a Green-tétel állítását. 3; (Szept. 18).

Ha $v : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ és \mathcal{F} zárt síkgörbe, akkor $\int_{\mathcal{F}} v = \int_{\mathcal{F}} \text{belseje} \partial_x v_2 - \partial_y v_1$
(feltéve, hogy mindkét integrál létezik).

2. Írjuk le az integrálkritériumot. 5; (Szept. 21).

Ha $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ monoton csökkenő, csupa nemnegatív értéket felvevő függvény,
akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ és $\int_1^{\infty} f(x)dx$ egyszerre konvergens.

3. Adjuk meg az $f(x) = 2x + 3$ függvény 0 körüli Taylor-sorát. 7; (Okt. 2).

$f(0) = 3, f'(0) = 2, f''(0) = f'''(0) = \dots = 0$, így a Taylor-sor $\frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x = 3 + 2x = f$ (ez közvetlenül is látszik).

4. Adjunk meg egy elégséges feltételt arra, hogy egy függvény egyenlő legyen Taylor-sorának összegfüggvényével. 7; (Okt. 2).

Ha f akárhányszor deriválható, és e deriváltak abszolútértéke minden pontban egy közös korlát alatt marad, akkor f egyenlő Taylor-sorának összegfüggvényével.

5. Határozzuk meg $\cos(\frac{i\pi}{2}) + i\sin(\frac{i\pi}{2})$ algebrai alakját. 9; (Okt. 9).

Az Euler-összefüggés szerint $\cos(\frac{i\pi}{2}) + i\sin(\frac{i\pi}{2}) = e^{i\frac{i\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

6. Írjuk le a komplex integrálokra vonatkozó Cauchy-féle alaptételt. 11; (Okt. 16, 26).

Egyszeresen összefüggő, nyílt halmazon reguláris komplex függvény zárt görbéken vett integrálja nulla.

7. Hány megoldása van: $y' = \sin(x)\sin(y), y(0) = 0$? Indokolj. 15; (Nov. 6).

Mivel az $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$ függvény parciális deriváltjai korlátosak, f eleget tesz a Lipschitz-feltételnek, ezért a Picard-Lindelöf tétel miatt a kezdetiérték probléma megoldása egyértelmű.

8. Van-e olyan homogén lineáris diff.egyenlet, melynek alaprendszere végtelen sok függvényből áll? Indokoljunk. 18; (Nov. 13, 20).

Alaprendszer mérete egyenlő a diff.egyenlet rendjével, ezért az alaprendszerek mindig végesek.

¹A kérdések után $X; (Y, Z)$ azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) kell(ene) tudni a választ...