Lovász Local Lemma

A Lovász Local Lemma a valószínűségszámítási módszer nevezetes eszköze, a módszert ismertető könyvek általában külön fejezetet szánnak neki. Mi csak egy nagyon rövid bevezető jellegű ismertetést vállalunk.

A Lemma mögötti filozófia a következő. A valószínűségszámítási módszert „alaphelyzetben" a következő szituációban használhatjuk. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_m$ valamilyen „kedvezőtlen", vagyis számunkra rossz események egy valószínűségi mezőn. Azt akarjuk belátni, hogy $A_1, \dots, A_m$ egyszerre elkerülhető, vagyis $Pr\left(\bigwedge_{i=1}^{m} \overline{A_i}\right) > 0$.

(Ez bizonyítja pl. egy olyan struktúra létezését, mely az $A_1, A_2, \dots, A_m$ eseményekkel jellemzett rossz tulajdonságok egyikével sem rendelkezik.) Az említett „alaphelyzetben" (gondoljunk $R(k)$ becslésére) ezt úgy mutatjuk meg, hogy belátjuk $\sum_{i=1}^{m} Pr(A_i) < 1$.

Ez azonban csak akkor igaz, ha az A_i események elég kis valószínűségűek, hiszen valószínűségeik összege is 1 alatt marad. A tipikus alkalmazásokban olyan ~~struktúrákat~~ tulajdonságú struktúrák létét tudjuk megmutatni, mely tulajdonságokkal az illető struktúrák jelentős része (általában „majdnem mind") rendelkezik, csak valamilyen okból a konstrukció mégis nehéz. (Ennek pl. oka lehet, hogy az adott struktúrák nagyon nagy része csak csillagászati paraméterek esetén rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal, v.ö. az Erdős-Fajtlowicz tételhez fűzött Megjegyzéssel.)

Van azonban olyan helyzet is, amikor az A_i események egyenként is nagy valószínűségűek, mégis triviálisan pozitív $Pr\left(\bigwedge_{i=1}^{m} \overline{A_i}\right)$ is. Ez történik akkor, ha az A_i-k függetlenek. Ha pl.

$\Pr(A_i) = 1-\varepsilon$ minden i-re, akkor $\Pr(\bigwedge_{i=1}^{m} \overline{A_i}) = \varepsilon^m$, ami nyilvánvalóan >0, noha nagyon kicsi. (Szó sincs tehát arról, hogy a bekövetkező események „majdnem mindegyike" olyan lenne, hogy az A_i események egyike sem következnék be.)

Ha az A_i-k teljesen függetlenek, akkor persze egyszerű a helyzet, mint mondtuk $\Pr(\bigwedge_{i=1}^{m} \overline{A_i}) > 0$ triviális. Sok esetben azonban olyan A_i események rendszerével van dolgunk, amelyek nem függetlenek, de függőségi viszonyaik viszonylag „lazák", mindegyikük csak néhány másiktól függ. A Lovász Local Lemma ilyen helyzetek leírására való. Arra ad ugyanis formális biztosítékot, hogy ha a függőségi rendszer „enyhe", akkor még mindig igaz lesz $\Pr(\bigwedge_{i=1}^{m} \overline{A_i}) > 0$.

A Lemmát egyik legegyszerűbb (s így nem a legerősebb) alakjában mondjuk ki.

<u>Lovász Local Lemma</u>: Legyenek $A_1, \dots, A_m$ egy valószínűségi mező eseményei, melyekre igaz, hogy $\forall i$-re A_i kölcsönösen független legfeljebb d kivételével minden más A_j eseménytől.

Legyen továbbá $\Pr(A_i) \le p$ $\forall i$-re.

Ekkor ha $4dp \le 1$, akkor $\Pr(\bigwedge \overline{A_i}) > 0$.

<u>Megj.</u>: Szokás $\{A_i\}_{i=1}^m$ függőségi gráfjáról beszélni. Ennek csúcsai az A_i-k és az élek a függőségeket jelölik. ~~Vagyis $\{i,j\} \notin E \Rightarrow$~~ Vagyis A_i független a vele összekötetlen A_j-ktől (illetve azoknak bármely Boole-kifejezésével megadható eseménytől). A Lemmában szereplő d a G gráf maximális fokszámának veendő.

Biz.

$\Pr(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_m)$-et akarjuk becsülni, ez pedig így írható:

$$\Pr(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_m) = \prod_{i=1}^{m} \Pr(\bar{A}_i \mid \bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_{i-1}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{m}\left(1-\Pr(A_i \mid \bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_{i-1})\right).$$

[Itt az első tag $\Pr(\bar{A}_1 \mid \emptyset) = 1-\Pr(A_1\mid\emptyset) = 1-\Pr(A_1)$.]

Ezért célszerű lesz a $\Pr(A_i \mid \bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_{i-1})$ feltételes valószínűséget becsülni. Megmutatjuk, hogy $\forall i$ $\Pr(A_i \mid \bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_{i-1}) \le 2p$.

~~Közvetlenül i-re teljes indukcióval igazoljuk, hogy~~

Ennél többet bizonyítunk, nevezetesen azt, hogy tetszőleges i-re és $S\subseteq\{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,m\}$-re $\Pr[A_i \mid \bigwedge_{j\in S}\bar{A}_j] \le 2p$.

Ezt $|S|$-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$S=\emptyset$-re az állítás triviális: $\Pr(A_i\mid\emptyset) = \Pr(A_i) \le p \le 2p$ teljesül, tehát az indukció elindul.

Legyen most $|S|=s$ és tfh. $|S|<s$-re már igazoltuk az állítást.

Az aktuális bizonyítandó $\Pr(A_i \mid \bigwedge_{j\in S}\bar{A}_j) \le 2p$ különböző i és $S\subseteq\{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,m\}$ $|S|=s$ szereposztások mellett.

Egy-egy adott szereposztás esetén a kényelem kedvéért mindig átindexelhetjük úgy az eseményeinket, hogy $i=m$ és $S=\{1,2,\dots,s\}$ legyen, ráadásul úgy, hogy $A_i=A_m$ és A_j ($j\in S$) ne alkosson élt a függőségi gráfban, ha $j>d$. A megbecsülendő valószínűség ebben így írható:

$$\Pr[A_m \mid \bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_s] = \frac{\Pr[A_m\bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_d \mid \bar{A}_{d+1}\bar{A}_{d+2}\dots\bar{A}_s]}{\Pr[\bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_d \mid \bar{A}_{d+1}\bar{A}_{d+2}\dots\bar{A}_s]}$$

A számlálót becsüljük először:

$$\Pr[A_m \bar{A}_1 \dots \bar{A}_d \mid \bar{A}_{d+1} \dots \bar{A}_s] \leq \Pr[A_m \mid \bar{A}_{d+1} \dots \bar{A}_s] =$$

$$= \Pr[A_m] \leq p,$$

ahol ~~[illegible]~~ felhasználtuk, hogy A_m független $A_{d+1}, \dots, A_s$-től.

Most a nevezőt becsüljük:

$$\Pr[\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_d \mid \bar{A}_{d+1} \dots \bar{A}_s] \geq \boxed{\cancel{1-\sum_{i=1}^{d} \Pr[\bar{A}}}$$

$$\geq 1 - \sum_{i=1}^{d} \Pr[A_i \mid \bar{A}_{d+1} \dots \bar{A}_s] \underset{\text{indukciós felt.}}{\geq} 1 - \sum_{i=1}^{d} 2p =$$

$$= 1 - 2pd \underset{4pd \leq 1}{\geq} \frac{1}{2}.$$

A két becslés hányadosából:

$$\Pr[A_m \mid \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_s] \leq \frac{p}{\frac{1}{2}} = 2p,$$ s ezzel az indukciós bizonyítást befejeztük. A kapott eredményt felhasználva pedig

$$\Pr[\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_m] = \prod_{i=1}^{m} \Pr[\bar{A}_i \mid \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{i-1}] \geq \prod_{i=1}^{m} (1-2p) > 0$$

adódik. $\square$