Az április 8-i gyakorlaton megoldott feladatok

1. Mutassuk meg, hogy ha a G gráf nem páros gráf, akkor a csúcsain mindig megadhatók (az adott csúcs szomszédait sorrendbe állító) olyan preferencialisták, amikhez a gráfban nem létezik stabil párosítás!

2. Definiáljuk az r-uniform $\mathrm{KG}^{(r)}(n,k)$ Kneser hipergráfot minden $r \geq 2, k \geq 1$ és $n \geq rk$ pozitív egészekből álló számhármasra az alábbi módon

$$V(\mathrm{KG}^{(r)}(n,k)) := \binom{[n]}{k},$$
$$\mathcal{E}(\mathrm{KG}^{(r)}(n,k)) := \{\{A_1, A_2, \ldots, A_r\} : \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\chi(\mathrm{KG}^{(r)}(n,k)) \leq \left\lceil \frac{n-(kr-1)}{r-1} \right\rceil + 1.$$

(Megjegyzés: Érdemes észrevenni, hogy a fenti formula értéke $r = 2$-re, vagyis a hagyományos Kneser gráfra éppen $n - 2k + 2$, ami a tanult pontos értéke a kromatikus számnak. Erdős Pál fogalmazta meg sejtésként 1973-ban (tehát még a Kneser sejtés bizonyítása előtt!), hogy talán ez az általánosabb felső korlát is pontos. És valóban így van: ezt egy 1986-ban megjelent cikkben bizonyította be Noga Alon, Frankl Péter és Lovász László. Ehhez a bizonyításhoz egy a Borsuk-Ulam tételnél általánosabb algebrai topológiai tételt használtak fel.)

3. Legyen $n \geq 2k$ (n, k pozitív egészek) és jelentse $\mu(n,k)$ azt a minimális számot, ahány él azonos színű csúcsokat kell, hogy összekössön ha a $\mathrm{KG}(n,k)$ Kneser gráf csúcsainak színezéséhez legfeljebb $n-2k+1$ színt használhatunk.

Házi feladatban láttuk, hogy

$$\mu(n,k) \leq \binom{2k-1}{k}.$$

Mutassuk meg, hogy $n = 2k + 1$ esetén egyenlőség áll!