FREUD RÓBERT

LINEÁRIS ALGEBRA

ELTE EÖTVÖS KIADÓ

9.4. Páratlanváros és Párosváros

Ebben a pontban azt vizsgáljuk, hogy egy k elemű halmaznak maximálisan hány olyan részhalmaza lehet, ahol az elemszámokra és a páronkénti metszetek elemszámára különféle feltételeket szabunk. Meglepő módon a feltételek minimális megváltoztatása az eredmény drámai megváltozását vonhatja maga után. Bevezetőként ezt az alábbi kis mesével illusztráljuk.

Hol volt, hol nem volt, az Óperenciás (Operációs?) tengeren túl, de a Nagy Prímszámtételen innen, Kombinatória kellős közepén volt egyszer egy icipici, 32 lakosú városka, amelynek a lakói imádtak egyesületeket alapítani. Kezdetben mindössze annyit kötöttek ki, hogy két egyesületnek nem lehet teljesen azonos a tagsága (hiszen akkor ez a kettő tulajdonképpen ugyanaz az egyesület, csak más néven). Még a „tagnélküli" egyesületet is bejegyezték, amelynek tehát senki sem tagja. (Ebben az egyesületben biztosan nem kerül sor éles vitákra!)

Szépen szaporodtak az egyesületek, mindenkinek több talicskányi tagkönyve volt már, azonban ettől a helyi nyomda kapacitása teljesen kimerült, és a polgárok rájöttek, hogy az egyesületek túlburjánzásának megakadályozására némi korlátozó intézkedéseket kell bevezetni. Két javaslat feküdt a nagytekintélyű szenátus előtt (amelynek természetesen mindenki tagja volt). Mindkét javaslat egyformán előírta, hogy ezentúl bármely két egyesületnek csak páros számú közös tagja lehet, és mindössze abban az apróságban mutatkozott eltérés, hogy emellett a Párosváros-pártiak azt akarták, hogy az egyesületek taglétszáma páros legyen, míg a Páratlanváros-pártiak a páratlan taglétszám mellett kardoskodtak. Mivel mindkét pártnak pontosan 16 képviselője volt a szenátusban, ezért nem tudván szavazással dönteni, segítségül hívták a szomszéd faluból aköztiszteletnek örvendő Lineáris Algebra apót, hogy mondjon véleményt. Az ő szavai most alább következnek.

9.4.1 Tétel (Páratlanváros)

Legyen $|X| = k$ és $H_1, \dots, H_n$ olyan (különböző) részhalmazok X-ben, amelyekre mindegyik $|H_j|$ páratlan és $|H_t \cap H_j|$ páros, ha $t \neq j$. Ekkor $\max n = k$. ♣

9.4.2 Tétel (Párosváros)

Legyen $|X| = k$ és $H_1, \dots, H_n$ olyan (különböző) részhalmazok X-ben, amelyekre mindegyik $|H_j|$ páros és $|H_t \cap H_j|$ páros, ha $t \neq j$. Ekkor $\max n = 2^{\lfloor k/2 \rfloor}$. ♣

Eszerint a mesebeli Párosvárosban $2^{16} = 65536$ egyesület alapítható, míg Páratlanvárosban mindössze 32.

A két tétel bizonyítása közös alapelven működik: a valósban megismert skalárszorzat és merőlegesség fogalmát kiterjesztjük a modulo 2 test feletti vektorterekre, és a részhalmazoknak, valamint a metszeteiknek az elemszámát ennek segítségével fogjuk jellemezni.

Bizonyítás: Legyenek X elemei $x_1, \ldots, x_k$ és H tetszőleges részhalmaz X-ben. Feleltessünk meg H-nak egy k hosszúságú $\underline{h}$ vektort a következőképpen: $\underline{h}$-ban az i-edik komponens 1, ha $x_i \in H$, és 0, ha $x_i \notin H$.

Legyen $T = F_2$, ekkor $\underline{h}$-t tekinthetjük T^k-beli vektornak.

Definiáljuk T^k-ban a skalárszorzatot mint a koordináták szorzatösszegét (ugyanúgy, ahogy a valós test felett). Ez most is szimmetrikus bilineáris függvény lesz, csak a „pozitív definitségnek" persze nincs értelme, továbbá egy nemnulla vektor is lehet önmagára merőleges (lásd a 9.4.13–9.4.14 feladatokat).

Ha a H és H' részhalmazoknak a $\underline{h}$, illetve $\underline{h}'$ vektorok felelnek meg, akkor a $\underline{h} \cdot \underline{h}'$ skalárszorzat $H \cap H'$ elemszámát méri: annyi darab 1-est kell összeadni, ahány közös elem van H-ban és H'-ben. Ennélfogva $\underline{h} \cdot \underline{h}'$ aszerint 0, illetve 1, hogy $|H \cap H'|$ páros, illetve páratlan. Ez speciálisan $H = H'$ esetén is igaz, azaz $\underline{h} \cdot \underline{h}$ aszerint 0, illetve 1, hogy $|H|$ páros, illetve páratlan.

Térjünk most rá a Páratlanváros-tétel bizonyítására. Világos, hogy k darab ilyen H_j megadható, például az egyelemű részhalmazok megfelelnek a feltételnek. Most azt igazoljuk, hogy ennél több H_j már nem létezik. Ezt úgy látjuk be, hogy a H_j-knek megfeleltetett $\underline{h}_1, \ldots, \underline{h}_n$ vektorokról kimutatjuk, hogy lineárisan függetlenek. Mivel T^k-ban legfeljebb k darab lineárisan független vektor létezik, így valóban a kívánt $n \le k$ egyenlőtlenséget kapjuk.

Vegyünk egy $\delta_1 \underline{h}_1 + \ldots + \delta_n \underline{h}_n = \underline{0}$ lineáris kombinációt. Ha mindkét oldalt skalárisan megszorozzuk $\underline{h}_j$-vel, akkor $\delta_1(\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_j) + \ldots + \delta_j(\underline{h}_j \cdot \underline{h}_j) + \ldots + {}$ $+\delta_n(\underline{h}_n \cdot \underline{h}_j) = 0$ adódik. Mivel $|H_j|$ páratlan, de minden $t \ne j$-re $|H_t \cap H_j|$ páros, ezért itt minden $\underline{h}_t \cdot \underline{h}_j$ skalárszorzat 0, kivéve $\underline{h}_j \cdot \underline{h}_j$-t, ami 1. Innen azonnal kapjuk, hogy $\delta_j = 0$. Mivel ez tetszőleges j-re teljesül, ezért a $\underline{h}_j$ vektorok valóban lineárisan függetlenek.

Rátérve a Párosváros-tétel bizonyítására, először lássuk be, hogy $2^{\lfloor k/2 \rfloor}$ ilyen részhalmaz megadható. Megfelelő, ha $\lfloor k/2 \rfloor$ darab (diszjunkt) elempárt veszünk, és az ezekből képezhető összes lehetséges halmazt tekintjük. (A mesebeli megfogalmazással, ha Párosvárosban 16 házaspár lakik, akkor bármely férj és feleség közösen lép vagy nem lép be egy egyesületbe.) Annak igazolása, hogy ez a maximum, további előkészületeket igényel.

Két $V = T^k$-beli vektor, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ merőlegessége most is jelentse azt, hogy a skalárszorzatuk $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$, továbbá egy U altérre legyen $U^\perp$ az U összes elemére merőleges vektorok halmaza: $U^\perp = \{\underline{x} \in V \mid (\underline{u} \in U \Rightarrow \underline{u}\cdot\underline{x} = 0)\}$.

Könnyen adódik, hogy $U^\perp$ altér, azonban a 8.1.7 Tétel megfelelője általában már nem igaz: előfordulhat, hogy $U \cap U^\perp \neq \underline{0}$ és $\langle U, U^\perp \rangle \neq V$. A $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ összefüggés viszont továbbra is érvényes. Mindezt a 9.4.15 feladatban tárgyaljuk.

Visszatérve Párosvárosba, legyenek $H_1, \ldots, H_n$ olyan részhalmazok X-ben, amelyekre minden $|H_j|$ és $|H_t \cap H_j|$ páros. Ez azt jelenti, hogy a H_j-knek megfelelő $\underline{h}_j$ vektorok ekkor önmagukra és egymásra is merőlegesek. Mivel (F_2 felett) $(\underline{a} + \underline{b})\cdot(\underline{a} + \underline{b}) = \underline{a}\cdot\underline{a} + 2(\underline{a}\cdot\underline{b}) + \underline{b}\cdot\underline{b} = \underline{a}\cdot\underline{a} + \underline{b}\cdot\underline{b}$, így a $\underline{h}_j$ vektorok által generált U altérben bármely két vektor merőleges egymásra. Emiatt $U \subseteq U^\perp$, tehát $\dim U \le \dim U^\perp$, és így a $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ összefüggésből $\dim U \le \lfloor \dim V/2 \rfloor = \lfloor k/2 \rfloor$ következik. Azaz valóban $n \le |U| = 2^{\dim U} \le 2^{\lfloor k/2 \rfloor}$, amint állítottuk. ∎

Feladatok

9.4.1 Egy k elemű halmaznak hány olyan (különböző) részhalmaza van, amelyek elemszáma a) páros; b) 3-mal osztható?

9.4.2 Tekintsük a 9.4.1–9.4.2 Tételek bizonyításában bevezetett $H \mapsto \underline{h}$ megfeleltetést.

a) A H és H' halmazok között milyen kapcsolat áll fenn, ha a $\underline{h}$ és $\underline{h}'$ vektorok minden komponensükben különböznek?

b) A H és H' halmazok között milyen műveletet kell elvégezni, hogy az így kapott halmaznak éppen a $\underline{h}$ és $\underline{h}'$ vektorok (F_2 feletti) összege feleljen meg?

9.4.3 Adjunk új bizonyítást a Páratlanváros-tételre az F_2 test feletti függetlenség helyett a $\mathbf{Q}$ feletti függetlenségre támaszkodva.

9.4.4 Legyen $|X| = k$, $H_1, \ldots, H_n$ (különböző) részhalmazok X-ben, és feleltessük meg a H_j-knek a $\underline{h}_1, \ldots, \underline{h}_n$ vektorokat a 9.4.1–9.4.2 Tételek bizonyításában látott módon. Ekkor azt a $k \times n$-es A mátrixot, amelynek az oszlopai éppen a $\underline{h}_1, \ldots, \underline{h}_n$ vektorok, a $H_1, \ldots, H_n$ halmazrendszer *illeszkedési mátrix*ának (vagy *incidenciamátrix*ának) nevezzük.

a) Mik lesznek a $B = A^T A$ szorzatmátrix elemei?

b) A fentiek felhasználásával adjunk még egy bizonyítást a Páratlanváros-tételre.

M**9.4.12 *Korlátozott metszetek.* Egy k elemű halmazban maximálisan hány olyan részhalmaz adható meg, amelyek páronkénti metszeteinek az elemszáma legfeljebb m-féle lehet (azaz $t \neq j$-re a $|H_t \cap H_j|$ értékek között legfeljebb m különböző fordul elő, ahol $m \leq k$ egy rögzített nemnegatív egész)?

A 9.4.13–9.4.16 feladatokban legyen p egy pozitív prím, $T = F_p$, $V = T^k$ és U altér V-ben. A V-beli skalárszorzatot, merőlegességet és $U^\perp$-t ugyanúgy definiáljuk, mint a $p = 2$ esetben.

9.4.13 *Kicsi alterek.*

a) Legyen $T = F_2$ és U olyan altér V-ben, amelyben csak a nullvektor merőleges önmagára. Bizonyítsuk be, hogy $|U| \leq 2$.

*b) Legyen p páratlan prím és $T = F_p$. Maximálisan hány eleme lehet V-ben egy olyan U altérnek, amelyben csak a nullvektor merőleges önmagára?

9.4.14 *Izotrop vektorok.*

a) Milyen p és k esetén létezik V-ben önmagára merőleges nemnulla vektor?

b) Milyen p és k esetén alkotnak az önmagukra merőleges vektorok alteret V-ben? Hány dimenziós ez az altér?

9.4.15 *U és $U^\perp$.*

a) Mutassunk példát arra, amikor $U \cap U^\perp \neq \underline{0}$, illetve $\langle U, U^\perp \rangle \neq V$.

b) Bizonyítsuk be, hogy $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

c) Igazoljuk, hogy $U \cap U^\perp = \underline{0} \iff \langle U, U^\perp \rangle = V$.

9.4.16 *Belterjes merőlegesség.* Vizsgáljuk meg, hogy létezik-e V-ben olyan U altér, amelyre $U = U^\perp$, ha

a) $p = 2$, $k = 10$; b) $p = 5$, $k = 11$; c) $p = 13$, $k = 30$;
d) $p = 23$, $k = 2$; e) $p = 43$, $k = 20$.

9.4.17 *Új egyesületek.*

a) A k lakosú Páratlanvárosban a 9.4.1 Tétel feltételei szerint n egyesület működik. Igaz-e, hogy ha az egyesületek száma nem maximális (vagyis $n < k$), akkor a rendszer bővíthető, azaz a meglevők mellé további egyesület is alapítható?

b) Mi a helyzet Párosvárosban?

Most megmutatjuk, hogy egy (legalább) háromdimenziós altérben mindig található önmagára merőleges nemnulla vektor. Az ortogonalizációs eljárással előállíthatunk $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ páronként merőleges vektorokat, legyen $\underline{b}_i \cdot \underline{b}_i = \beta_i$, $i = 1, 2, 3$. Egy $\underline{v} = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \underline{b}_i$ vektor akkor és csak akkor merőleges önmagára, ha

$$0 = \underline{v} \cdot \underline{v} = (\sum_{i=1}^{3} \gamma_i \underline{b}_i) \cdot (\sum_{i=1}^{3} \gamma_i \underline{b}_i) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i^2 \beta_i$$

teljesül. A γ_i-ket ismeretleneknek tekintve ennek az egyenletnek pl. a Chevalley-tétel (9.3.2 feladat) szerint van nemtriviális megoldása.

9.4.14 a) Ha $p \equiv 3 \pmod 4$, akkor $k \geq 3$ esetén, egyébként $k \geq 2$-re. Ugyanis a $z_1^2 + z_2^2 \equiv 0 \pmod p$ kongruenciának pontosan $p \not\equiv 3 \pmod 4$ mellett van nemtriviális megoldása, a $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \equiv 0 \pmod p$ kongruencia pedig már minden p-re nemtriviálisan megoldható. — b) Ha csak a nullvektor merőleges önmagára, azaz ha $k = 1$ és p tetszőleges vagy $k = 2$ és $p \equiv 3 \pmod 4$, akkor ez triviálisan altér (dimenziója 0). Ettől eltekintve csak $p = 2$-re kapunk alteret, de k tetszőleges lehet. Ennek a dimenziója $k - 1$. (Azokból a vektorokból áll, amelyeknek páros sok koordinátája 1-es.)

9.4.15 a) Pl. legyen $p = k = 2$ és $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. — b) Egy $\underline{x} \in V$ vektor pontosan akkor merőleges U-ra, ha U egy bázisának minden elemére merőleges. Ez a feltétel egy $\dim U$ egyenletből álló, $\dim V$ ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszert jelent, amelynek a rangja $\dim U$ (ugyanis a sorok, amelyek az U báziselemeiből származnak, lineárisan függetlenek). A megoldásoknál így a szabad paraméterek száma $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$. — c) A b) részből és a 4.6.6 feladatból következik.

9.4.16 Létezik: a), c), e). — Útmutatás: A $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$ összefüggés alapján k szükségképpen páros. Használjuk fel a 9.4.14a feladatot is.

9.4.17 a) Nem igaz, vegyünk pl. egy nagy páratlan elemszámú részhalmazt és a tőle diszjunkt egyelemű részhalmazokat. — b) Igaz. A Párosváros-tétel bizonyítását követve tekintsük a H_j halmazoknak megfelelő $\underline{h}_j$ vektorok által generált U alteret. Ha ennek az U-nak nem minden eleme szerepel a $\underline{h}_j$-k között, akkor egy ilyen hiányzó vektorral bővíthetjük a rendszert. Ha U minden eleme szerepel, de az elemszám nem maximális, akkor $\dim U < \lfloor \dim V/2 \rfloor$ és így $\dim U^{\perp} \geq \dim U + 2$.