**Házi feladatok az április 23-i gyakorlatra**
(Feladva április 9-én)

1. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ Sperner rendszer akkor és csak akkor teljesíti egyenlőséggel a LYM egyenlőtlenséget, ha $\mathcal{F} = \binom{[n]}{k}$ valamilyen $k$-ra (amire $0 \leq k \leq n$ teljesül).

2. Legyen $n \geq 2k$ és jelentse $\mu(n,k)$ azt a minimális számot, ahány él azonos színű csúcsokat kell, hogy összekössön ha a $\mathrm{KG}(n,k)$ Kneser gráf csúcsait $n-2k+1$ színnel színezzük. Gyakorlaton beláttuk, hogy
$$\mu(n,k) \leq \binom{2k-1}{k}.$$
Bizonyítsuk be, hogy $k=2$ esetén egyenlőség áll a fenti egyenlőtlenségben!

3. Mutassuk meg, hogy az előző feladatban idézett egyenlőtlenség $n = 2k+1$ esetén is egyenlőséggel teljesül, vagyis, hogy
$$\mu(2k+1,k) = \binom{2k-1}{k}.$$

4. Három emberrel a következő kooperatív játékot játsszuk. Mindhármuk fejére $1/2 - 1/2$ valószínűséggel (egymástól függetlenül) egy fehér vagy egy fekete sapkát adunk úgy, hogy minden játékos látja a többiek fején levő sapkák színét, de nem tudja, hogy a saját fején milyen színű sapka van. Ezután minden játékos tippelhet a saját fején levő sapka színére. De nem kötelező tippelnie, passzolhat is. Ha mindenki passzol, akkor vesztettek. Ha van olyan játékos, aki nem passzol, akkor pontosan akkor nyernek, ha mindenki, aki tippel, helyesen tippeli meg a saját sapkája színét.

   (A tippekkel, illetve passzolással nem várhatják meg egymást, mindenki egyszerre fel kell írja egy papírra a saját tippjét, vagy amennyiben passzol, akkor azt, 'es ezeket a papírokat csak akkor mutatják meg, amikor már mindenki készen van. Vagyis nem befolyásolhat senkit, hogy a többiek mit csinálnak. Ugyanakkor az megengedett, hogy még a játék megkezdése - tehát a sapkák kiosztása - előtt megállapodjanak egy közös stratégiában.)

   Gyakorlaton beláttuk, hogy a fenti játék három résztvevője tud olyan stratégiával játszani, amivel $3/4$ valószínűséggel nyernek. Bizonyítsuk be, hogy ennél jobb stratégia viszont nem elképzelhető, vagyis $3/4$-nél nagyobb esélyük nem lehet a nyerésre.

5. Játsszuk most az előző feladatban leírt játékot három helyett hét résztvevővel! (A szabályok ugyanazok: akkor nyernek, ha legalább egyikük nem passzol, és mindenki, aki tippel, jól tippel.) Mi lesz most a nyerési esély a lehető legjobb stratégia mellett?