Házi feladat a február 25-i gyakorlatra
(Feladva február 11-én)

1. Egy $\mathcal{H}$ hipergráf $\chi(\mathcal{H})$ kromatikus számán azon színek minimális számát értjük, ahány színnel a csúcsok kiszínezhetők úgy, hogy egyetlen él se legyen egyszínű.

   Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{H}$ olyan, hogy semelyik két élének sincs pontosan 1 közös pontja (és tartalmaz legalább egy élet), akkor $\chi(\mathcal{H}) = 2$.

2. Állapítsuk meg a $K_{2021}^{(47)}$, azaz a 2021 csúcsú teljes 47-uniform hipergráf

$$\chi_e(K_{2021}^{(47)})$$

   élkromatikus számát!

   (Egy hipergráf élkromatikus száma azon színek minimális száma, ahány színnel az élek kiszínezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös csúcsa.)

3. Egy $\vec{D}$ irányított gráf $L(\vec{D})$ élgráfját a következő módon definiáljuk. $L(\vec{D})$ csúcsai a $\vec{D}$ élei és két $\vec{D}$-beli él, e és f, pontosan akkor alkot élet $L(\vec{D})$-ben, ha egyikük végpontja a másiknak kezdőpontja.

   Bizonyítsuk be a

$$\chi(L(\vec{D})) \geq \log_2 \chi(D)$$

   egyenlőtlenséget!

   (Itt D a $\vec{D}$ irányított gráf irányítatlan változatát jelenti, vagyis azt a gráfot, amit úgy kapunk $\vec{D}$-ből, ha az élek irányítását egyszerűen figyelmen kívül hagyjuk.)

   $\chi(F)$ egy F gráf kromatikus számát jelöli. (A $\chi(D)$ érték tehát a D gráf kromatikus száma. Az $L(\vec{D})$ gráfot eleve irányítatlan gráfként definiáltuk, $\chi(L(\vec{D}))$ ennek a kromatikus száma.)