Listaszínezés

Definíció: Egy G gráf minden $v \in V(G)$ csúcsához legyen adott egy $L(v)$ színlista. Azt mondjuk, hogy G színezhető az adott listákról, ha van a csúcsoknak olyan jó színezése, ahol a v csúcs $c(v)$ színére fennáll, hogy $c(v) \in L(v)$ minden $v \in V(G)$-re. (Jó színezésen szokás szerint azt értjük, hogy szomszédos pontok nem lehetnek azonos színűek.)

Definíció: A G gráf $ch(G)$-vel jelölt *listaszínezési szám*a az a legkisebb k pozitív egész, amire fennáll, hogy akárhogyan adunk meg a csúcsokhoz olyan $L(v)$ listákat, amikre $|L(v)| \geq k$ teljesül, G színezhető lesz az adott listákról.

Megjegyzés: A $ch(G)$ rövidítés az angol *choice number* elnevezésből származik. A listaszínezési számot egymástól függetlenül Vizing, illetve, Erdős-Rubin-Taylor vezette be. Utóbbiak a részben innen híressé vált Dinitz-problémát említik motivációként, amelyet később látni fogunk.

Állítás: Tetszőleges G gráfra $ch(G) \geq \chi(G)$.

Bizonyítás:

Ha minden lista azonos, akkor a listákról való színezhetőség éppen azt jelenti, hogy a gráf kiszínezhető annyi színnel, amennyi a listákon szerepel. Ebből adódik, hogy egyforma listák esetén a listaméret legalább $\chi(G)$ kell hogy legyen ahhoz, hogy a gráf színezhető legyen az adott listákról, ebből pedig következik az állítás. Q.E.D.

Az intuíció azt sugallhatja, hogy ha nem egyformák a listáink, ez csak nagyobb szabadságot jelent, az a "legrosszabb" eset, ha minden lista egyforma. Ha így volna, akkor a fenti állításban minden gráfra egyenlőség állna, vagyis $ch(G)$ definíciója nem volna más, mint a kromatikus szám elbonyolított újradefiniálása. A helyzet azonban nem ez, a fenti intuíció félrevezet bennünket. Ezt azonnal láthatjuk a következő példából.

Példa: $ch(K_{3,3}) > \chi(K_{3,3}) = 2$.

Bizonyítás:

Azt kell megmutatnunk, hogy $K_{3,3}$ csúcsaihoz rendelhetünk olyan kételemű listákat, amelyekről nem színezhető ki jól. Legyenek a csúcsok a, b, c, d, e, f, ahol a, b, c és d, e, f alkossa a $K_{3,3}$ két független halmazát. A listák pedig legyenek:

$$L(a) = L(d) = \{1, 2\},\ L(b) = L(e) = \{1, 3\},\ L(c) = L(f) = \{2, 3\}.$$

Próbáljuk meg a gráfot kiszínezni ezekről a listákról. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a színe (ezentúl x színét c(x) jelöli) 1 lesz. Ekkor szükségképpen $c(e) = 3$, emiatt pedig $c(c) = 2$. Ekkor viszont d-t már nem tudjuk a-tól is és c-től is különbözőre színezni. Q.E.D.

Felmerül ezután a kérdés, hogy mennyivel lehet nagyobb $ch(G)$ a kromatikus számnál. Az előbbi példa általánosításával megmutatjuk, hogy akármennyivel.

Tétel: Minden $k \geq 2$ pozitív egészhez létezik olyan G páros gráf, amire $ch(G) > k$.

Bizonyítás:

Megfelelő választás lesz a $G = K_{\binom{2k-1}{k},\binom{2k-1}{k}}$ teljes páros gráf. Azt mutatjuk meg tehát, hogy $K_{\binom{2k-1}{k},\binom{2k-1}{k}}$ csúcsaihoz hozzárendelhetők olyan k elemű listák, amikről a gráf nem színezhető.

Tekintsük színeknek egy $2k-1$ elemű halmazát. E színekből pontosan $\binom{2k-1}{k}$ darab különböző k elemű lista készíthető. Rendeljük ezek mindegyikét a $K_{\binom{2k-1}{k},\binom{2k-1}{k}}$ gráf mindkét színosztályának pontosan egy csúcsához. (Ekkor $k=3$-ra éppen az előbbi példa listáit kapjuk.) Megmutatjuk, hogy e listákról nem színezhető jól a gráf. Tegyük fel indirekt, hogy van jó színezés. Tekintsük a teljes páros gráfunk egyik (maximális) független halmazát. Ennek színezésében legalább k színt kellett használnunk, hiszen ha legfeljebb $(k-1)$-et használtunk volna, akkor lenne k olyan szín, amelyek egyikét sem használtuk itt (hiszen $2k-1$ színünk van és $(2k-1)-(k-1)=k$), azonban ez a k szín éppen az adott független halmaz egyik pontjához rendelt színlista k eleme, így azt a pontot nem színezhettük volna szabályosan. Ugyanezt a másik (maximális) független halmazra is elmondhatjuk, tehát annak színezésében is legalább k szín vesz részt. Mivel a két független halmaz között minden él be van húzva, ez a kétszer k szín mind különböző, vagyis legalább $2k$ színünk kellene legyen. Ez viszont ellentmondás, hiszen csak $2k-1$ színünk van. Az adott listákról tehát $K_{\binom{2k-1}{k},\binom{2k-1}{k}}$ valóban nem színezhető. Q.E.D.

Könnyű belátni, hogy (akárcsak $\chi(G)$-re) most is igaz az alábbi felső korlát.

Állítás: Tetszőleges G gráfra $ch(G) \leq \Delta(G)+1$.

Bizonyítás:

A bizonyítás azonos a $\chi(G)$-re vonatkozó analóg állítás bizonyításával. Színezzük a csúcsokat mohón, vagyis a listájuk tetszőleges olyan színével, ami a szomszédságukban még nem fordul elő. Mivel minden szomszédság legfeljebb $\Delta(G)$ elemű, ha minden listán ennél legalább eggyel több szín van, a színezés nem fog elakadni. Q.E.D.

Megjegyzés: Könnyű meggondolni, hogy a Brooks-tétellel analóg állítás is igaz marad, lényegében az eredetiével megegyező bizonyítással.

Láttuk, hogy $ch(G)$ tetszőlegesen sokkal nagyobb lehet a kromatikus számnál. Ugyanakkor könnyű olyan gráfokra példát mutatni, amelyekre a két paraméter egyenlő (ilyenek például a körök, párosak és páratlanok egyaránt). Felmerül a kérdés, hogy pontosan mely gráfokra áll egyenlőség. Erre a kérdésre a válasz nem ismert. Jó lenne akkor legalább érdekes gráfosztályokról tudni, amelyek minden tagjára egyenlőség áll. Az alábbi híres sejtés egy ilyen tipusú állítást fogalmaz meg.

Listaszínezési sejtés: Ha G élgráf, akkor $ch(G)=\chi(G)$.

Ez a sejtés máig megoldatlan, van viszont egy fontos speciális esete, amire megoldott. Ez tartalmazza a már említett Dinitz-problémát is, ami a következő.

Dinitz-probléma: Tekintsünk egy n-szer n-es mátrixot, melynek minden mezőjéhez adott egy n elemű halmaz. Igaz-e, hogy akármik is legyenek e halmazok, kiválasztható minden mezőhöz az őhozzá rendelt halmaz egyik eleme úgy, hogy az egy sorban és az egy oszlopban levő mezőkhöz különböző kiválasztott elemek tartozzanak?

Az előbbi kérdésben szereplő mátrix sorait és oszlopait egy teljes páros gráf két színosztályának, a mezőket e gráf éleinek, a halmazokat színlistáknak tekintve az előbbi probléma avval ekvivalens, hogy igaz-e $ch(L(K_{n,n})) = n$.

Erre a kérdésre már ismert a válasz, sőt sokkal általánosabb az alábbi tétel.

Galvin tétele: Ha G páros gráf, akkor $ch(L(G)) = \chi(L(G))$.

Galvin tételének bizonyításához némi előkészületre van szükségünk.

Definíció: Egy G irányított gráf csúcsainak U részhamazát elnyelő tulajdonságúnak nevezünk, ha $\forall v \in V(G) - U \ \exists u \in U$ amire $(v, u) \in E(G)$. (Figyelem: itt (v, u) irányított élet jelent.) Egy $U \subseteq V(G)$ halmaz *kernel*, ha független ponthalmaz, és egyben elnyelő tulajdonságú.

Megjegyzés: Nem minden irányított gráf tartalmaz kernelt, tekintsünk például egy ciklikusan irányított háromszöget.

Lemma: Legyen G véges egyszerű gráf a csúcsaihoz rendelt $L(v)$ színlistákkal. Ha G élei irányíthatók úgy, hogy
1) $\forall v \in V(G)$-re teljesüljön, hogy $d^+(v) + 1 \leq |L(v)|$ (itt d^+ az adott csúcsból kifelé irányított élek száma, vagyis a csúcs "kifoka"); és
2) a kapott irányított gráf minden feszített részgráfja tartalmaz kernelt,
akkor G színezhető az adott listákról.

Bizonyítás:

Tekintsünk egy a Lemma feltételeinek eleget tevő gráfot a feltételeknek szintén eleget tevő $L(v)$ listákkal, és tekintsük a feltételek szerint létező, kívánt tulajdonságú irányítást. Vegyük most az egyik (legalább egy $L(v)$ listán szereplő) színt, nevezzük ezt pirosnak. Tekintsük most G azon csúcsai által meghatározott feszített részgráfját, amely csúcsok listáján szerepel a piros szín. A feltételek szerint e feszített részgráf tartalmaz kernelt, legyen ez U. Színezzük az U-beli csúcsokat pirosra, majd töröljük a piros színt minden más pont listájáról. Gondolatban szintén töröljük a pirosra színezett csúcsokat a hozzájuk csatlakozó élekkel együtt. Az így megmaradt gráfban U kernel volta miatt a megmaradtak közül minden olyan csúcsnak a kifoka csökkent, amelynek a listája a piros szín törlése miatt eggyel kevesebb eleművé vált. Ez azt jelenti, hogy a Lemma 1-es feltétele a megmaradt gráfra és megmaradt listákra is fennáll. A 2-es feltétel nem romolhatott el, így mindkét feltétel igaz továbbra is. Ugyanezt a lépést piros helyett most egy másik színre megismételve mindaddig folytathatjuk az eljárást, amíg minden pontot ki nem színeztünk. Mivel egy színt csak egy lépésben használunk (ahol nem színeztünk vele ott töröljük), független pontokat színezünk vele (egy kernel definíció szerint független), és minden pontot a listáján szereplő színnel színezünk, a kapott színezés szabályos lesz. Q.E.D.

Galvin tételének bizonyítása:

A Lemma szerint elég megmutatnunk, hogy egy G páros gráf $L(G)$ élgráfjának élei mindig irányíthatók úgy, hogy az összes feszített részgráf tartalmazzon kernelt, és minden pont kifoka legyen kisebb $\chi(L(G)) = \chi'(G)$-nél.

Azt fogjuk bizonyítani, hogy van ilyen irányítás. Ennek megadásához legyen $G = (A, B, E)$ és tekintsük G éleinek egy optimális színezését az $1, 2, \ldots, k := \chi'(G)$ színekkel. Egy G-beli e él (azaz egy $L(G)$-beli pont) ezen színezés szerinti színét jelölje $c(e)$. Ha G-nek e és f éle közös végponttal rendelkezik A-ban, akkor a közöttük $L(G)$-ben húzott élet irányítsuk e-ből f-be, ha $c(e) < c(f)$, illetve f-ből e-be, ha $c(f) < c(e)$. Ha G-nek e és f éle közös végponttal rendelkezik B-ben, akkor éppen fordítva, a közöttük $L(G)$-ben húzott élet irányítsuk e-ből f-be, ha $c(e) > c(f)$, illetve f-ből e-be, ha $c(f) > c(e)$.

Ezzel az irányítást meg is adtuk, azt kell csak belátnunk, hogy valóban teljesíti a Lemma feltételeit.

A Lemma 1-es feltételének teljesülését könnyű látni: tetszőleges $e \in E(G) = V(L(G))$-re, ha $c(e) = j$, akkor belőle $L(G)$-ben azokba az $f \in V(L(G))$ csúcsokba indul él, amelyekre vagy $c(f) < j$ és e és f (mint G-beli élek) közös csúccsal rendelkeznek B-ben - ilyen f legfeljebb $(j-1)$ van - vagy $c(f) > j$ és e és f közös csúccsal rendelkeznek A-ban - ilyen f pedig legfeljebb $(k-j)$ van. Ez azt jelenti, hogy az e-ből ($L(G)$-ben) kifelé mutató élek száma nem lehet több, mint $j - 1 + k - j = k - 1$, ami valóban kisebb $k = \chi'(G)$-nél.

A Lemma 2-es feltételének teljesülését a G éleinek számára vonatkozó teljes indukcióval látjuk be. Ha G-nek csak egy éle van, az állítás (miszerint tehát $L(G)$ megadott irányítása olyan, hogy $L(G)$ minden feszített részgráfja tartalmaz kernelt) nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy már beláttuk az állítást $|E(G)| \leq m$ esetén, most belátjuk arra is, ha $|E(G)| = m+1$. Az $L(G)$ feszített részgráfjai közül azok, amelyek valódi részgráfok az indukciós feltevés szerint tartalmaznak kernelt, így elég csak azt belátni, hogy $L(G)$ maga tartalmaz kernelt az adott irányítás mellett. Kijelölünk egy $U \subseteq V(L(G)) = E(G)$ halmazt, ami "jelöltünk" lesz arra, hogy kernel legyen $L(G)$-ben. G minden B-beli pontjánál válasszuk ki azt az e élet, amelyikre az adott pontba befutó élek között $c(e)$ minimális. Alkossák az így kiválasztott élek az U halmazt.

Vegyük észre, hogy $U \subseteq V(L(G))$ elnyelő tulajdonságú, hiszen mindegyik $f \in E(G)$ élnek van B-beli végpontja, és annál a végpontnál vagy őt magát választottuk U-ba, vagy egy olyan e élet, amelybe f-ből irányított él fut $L(G)$-ben, mivel $c(e) < c(f)$.

Mindez azt jelenti, hogy ha U nem kernel, az csak azért lehet, mert nem független. Ekkor van benne két G-beli él, mondjuk a és b, amiknek van közös végpontja, és U választásának módja garantálja, hogy ez a közös végpont csakis A-ban lehet. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $c(b) < c(a)$. Hagyjuk most el b-t G-ből. Az így megmaradó $G - \{b\}$ gráfhoz tartozó irányított $L(G - \{b\})$ élgráfban az indukciós feltevés szerint van kernel, legyen ez T. Megmutatjuk, hogy T akkor is kernel marad, ha a b-t visszatesszük. T kernel $L(G - \{b\})$-ben, tehát független, és minden b-től különböző $V(L(G))$-beli csúcsra teljesíti, hogy az vagy benne van, vagy küld bele élet. Elég tehát azt igazolnunk, hogy b is küld bele élet ($L(G)$-ben). Két eset van: $a \in T$ vagy $a \notin T$. Ha $a \in T$, akkor $(b, a) \in E(L(G))$ miatt kész vagyunk [figyelem: itt (b, a) irányított élet jelent és $L(G)$-t most a megadott irányításával együtt értjük]. Ha $a \notin T$, akkor viszont $\exists e \in T$, amire

$(a, e) \in E(L(G))$. De $c(a)$ minimális volt az a-nak B-beli végpontjánál, így e-nek a-val csakis A-ban lehet közös végpontja, és annak is teljesülnie kell, hogy $c(e) > c(a)$. De ekkor e-nek A-beli végpontja b-vel is közös végpont, és $c(a) > c(b)$ miatt $c(e) > c(b)$ is teljesül. Eszerint e olyan pontja T-nek, amibe b küld élet $L(G)$-ben, így T valában kernel. Q.E.D.

Megjegyzés: Az előbbi bizonyítás szoros kapcsolatban áll az úgynevezett stabil párosítások problémakörével. Az alábbiakban erről szólunk pár szót.

Definíció: Legyen $G = (A, B, E)$ páros gráf, melynek minden csúcsánál adott az oda befutó éleknek egy sorrendje. Egy $M \in E(G)$ párosítást stabilnak mondunk, ha tetszőleges $e \in E(G) - M$-re e-nek valamely végpontja lefedett egy olyan M-beli f éllel, mely az e és f közös végpontjánál kisebb sorszámot visel e-nél (azt mondjuk: a közös végpont preferálja f-et e-vel szemben).

Magyarázat: A stabil párosítás fogalma az alábbi elgondolásból származik. A csúcsoknál adott sorrend azt fejezi ki, hogy az illető csúcs a számára lehetséges partnereket milyen sorrendben preferálná. Egy párosítás akkor stabil, ha nincsen olyan benne nem szereplő él, melynek mentén ezen él mindkét végpontja "szívesebben" lenne párosítva, mint ahogyan az adott párosításban van. A csúcsoknál megadott sorrendek könnyen lefordíthatók a páros gráf élgráfjának egy irányítására. Nem nehéz látni, hogy ekkor a stabil párosításoknak az irányított élgráfban éppen a kernelek felelnek meg. Általában igaz, hogy páros gráf csúcsainál a szomszédokhoz (azaz az onnan kiinduló élekhez) tetszőleges sorrendet rendelve lesz stabil párosítás. A fenti bizonyítás utolsó részében éppen ezt láttuk be speciálisan választott preferencia sorrendek mellett. E speciális sorrendekre a Lemma 1-es feltétele miatt volt szükségünk, stabil párosítás létezése lényegében ugyanígy bizonyítható általános esetben is.

További megjegyzés: Kőnig egy tétele szerint páros gráfra az élkromatikus szám mindig egyenlő a maximális fokszámmal. A fentiek szerint az élek listaszínezési száma is ennyi, ilyen értelemben Galvin tétele általánosítja Kőnig tételét. Érdemes ehhez hozzátenni, hogy az általánosítás formális, hiszen azt látjuk be közvetlenül, hogy G páros gráfra $ch(L(G)) = \chi(L(G))$, ebből a $ch(L(G)) = \Delta(G)$ egyenlőség továbbra is Kőnig említett tételén keresztül következik.