**Perfekt Gráf Tétel:** Egy gráf pontosan akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.

*Megjegyzés:* Vegyük észre, hogy a fenti állítás ekvivalens avval, hogy "Ha $G$ perfekt, akkor a komplementere is perfekt."

A Perfekt Gráf Tétel bizonyítása helyett egy erősebb tételt bizonyítunk. (Ezt szintén Lovász László bizonyította valamivel a Perfekt Gráf Tételre adott eredeti bizonyításának megszületése után.)

**Tétel** (Lovász tétele): Egy $G$ gráf akkor és csak akkor perfekt, ha minden $G'$ feszített részgráfjára teljesül, hogy

$$\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|.$$

*Megjegyzés:* A fenti feltételt $G$ helyett $\bar{G}$-re felírva nem történik más, mint az, hogy $\alpha(G)$ és $\omega(G)$ "szerepet cserél," hiszen $\alpha(\bar{G}) = \omega(G)$ és $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$. Ezért a Tétel állításából következik, hogy $G$ pontosan akkor perfekt, ha $\bar{G}$ perfekt, ami éppen a Perfekt Gráf Tétel állítása.

A most következő bizonyítás Gaspariantól származik.

A bizonyítást a következő tagolásban ismertetjük. Egy rövid előkészítő szakasz után a bizonyítás lényegi részét három lemma bizonyítására fogjuk bontani.

*A bizonyítás előkészítése:*

Az állítás azon része, hogy perfekt gráfok teljesítik a fenti egyenlőtlenséget majdnem nyilvánvaló: Ilyenkor minden $G'$ feszített részgráfra $\chi(G') = \omega(G')$, $\alpha(G') \cdot \chi(G') \geq |V(G')|$ pedig tetszőleges $G'$ gráfra igaz, hiszen $\chi(G')$ darab, egyenként legfeljebb $\alpha(G')$ méretű színosztály le kell tudja fedni az egész $V(G')$ szögponthalmazt. (Azt, hogy egy színosztály legfeljebb $\alpha(G')$ méretű onnan tudjuk, hogy az azonos színnel színezhető pontok mindig függetlenek, $\alpha(G')$ pedig éppen a legnagyobb független halmaz mérete $G'$-ben.)

Az állítás lényegi része tehát az, hogy amennyiben a fenti egyenlőtlenség egy gráf minden feszített részgráfjára teljesül, akkor a gráf szükségképpen perfekt.

Egy gráfot imperfektnek fogunk hívni, amennyiben nem perfekt. Azt mondjuk, hogy $G$ minimális imperfekt gráf, ha ő maga nem perfekt, de minden nála kisebb (azaz valódi) feszített részgráfja az. A perfektség definíciójából következik, hogy minden imperfekt gráf tartalmaz minimális imperfekt gráfot feszített részgráfként. Azt fogjuk igazolni, hogy ha $G$ minimális imperfekt gráf, akkor $\alpha(G)\omega(G) < |V(G)|$, ebből következik, hogy imperfekt gráfokban nem teljesülhet az előbbi egyenlőtlenség fordítottja minden feszített részgráfra, ami épp az állítással ekvivalens.

Most kimondjuk és bebizonyítjuk az első lemmát.

*1. Lemma:* Ha $G$ minimális imperfekt gráf, akkor csúcsainak tetszőleges $A \subset V(G)$ független halmazára

$$\omega(G - A) = \omega(G).$$

*Az 1. Lemma bizonyítása:* Legyen $G$ a feltétel szerinti, és tegyük fel indirekt, hogy $\omega(G-A) \neq \omega(G)$. Ez azt jelenti, hogy $\omega(G-A) < \omega(G)$. Viszont $G$ minimális imperfekt volta miatt $(G-A)$ perfekt, így kiszínezhető $\omega(G-A)$ színnel. Eggyel több színnel viszont maga $G$ is kiszínezhető, hiszen a $(G-A)$-ban nem szereplő pontok független halmazt alkotnak, ti. éppen $A$-t. Ezért $\chi(G) \leq \chi(G-A)+1 = \omega(G-A)+1 \leq \omega(G)$ adódik, ahol az utolsó egyenlőtlenség az indirekt feltevés következménye. Ez viszont azt jelentené, hogy $G$ maga is perfekt, hiszen nemcsak minden részgráfja, hanem ő maga is kiszínezhető annyi színnel, amennyi a benne levő legnagyobb klikk mérete. De $G$ a feltétel szerint nem perfekt, így ellentmondásra jutottunk, ami bizonyítja a lemma állítását.

*2. Lemma:* Legyen $G$ minimális imperfekt gráf. $G$ függetlenségi számát jelölje $\alpha$, klikkszámát $\omega$. Ekkor megadható $G$ független halmazainak egy $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha\omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \ldots, B_{\alpha\omega}$ rendszere úgy, hogy $\forall i$-re $A_i \cap B_i = \emptyset$ és $\forall i \neq j$-re $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ .

*A 2. Lemma bizonyítása:* Először megadunk egy $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha\omega}$ és $B_0, B_1, \ldots, B_{\alpha\omega}$ független halmazokból, illetve klikkekből álló rendszert, majd megmutatjuk, hogy ezek rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal.

Legyen $A_0$ egy tetszőleges (de mostantól rögzített) maximális méretű független halmaz $G$-ben, vagyis $|A_0| = \alpha$. Az $A_0$ halmaz elemei legyenek $a_1, \ldots, a_\alpha$. Most tekintsük a $G-\{a_1\}$ gráfot. Ez perfekt és az 1. Lemma szerint $\omega$ a klikkszáma. (Itt felhasználtuk, hogy egyetlen pont is független halmazt alkot, vagyis $\{a_1\}$ beírható az 1. Lemmában szereplő $A$ független halmaz helyébe.) Mivel $G-\{a_1\}$ perfekt, ez azt jelenti, hogy a kromatikus száma is $\omega$-val egyenlő. Tekintsük egy optimális színezését, és $A_1, A_2, \ldots, A_\omega$ legyenek ennek a színezésnek a színosztályai. Hasonlóan definiáljuk az $A_{\omega+1}, \ldots, A_{2\omega}$ független halmazokat mint a $G-\{a_2\}$ gráf egy optimális színezésének színosztályait. Általánosságban is legyenek $A_{(i-1)\cdot\omega+1}, A_{(i-1)\cdot\omega+2}, \ldots, A_{i\cdot\omega}$ a $G-\{a_i\}$ perfekt gráf egy optimális színezésének színosztályai. (Az $i$ itt befutja az $1, 2, \ldots, \alpha$ számokat.)

Az 1. Lemma révén tudjuk, hogy tetszőleges független halmazt elhagyva $G$-ből a klikkszám nem csökken. Ebből következik, hogy minden fenti $A_i$-hez választható olyan $B_i$ klikk, melynek nincsen közös pontja $A_i$-vel és mérete $\omega(G)$. Rögzítsünk egy ilyen $B_i$-t minden $A_i$-hez, ezzel megadtuk a $B_0, B_1, \ldots, B_{\alpha\omega}$ klikkeket.

Tudjuk, hogy a megadás miatt minden $0 \leq i \leq \alpha\omega$-ra $A_i \cap B_i = \emptyset$. Megmutatjuk, hogy ugyanakkor $i \neq j$ esetén mindig $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ teljesül. (Ebből egyébként azonnal következik, hogy ilyenkor $|A_i \cap B_j| = 1$, hiszen egy klikknek és egy független halmaznak legfeljebb egy közös pontja lehet.)

Tekintsük $B_i$-t és tegyük fel, hogy $A_0 \cap B_i = \emptyset$. Ekkor $B_i$ az összes $G-\{a_i\}$ gráfban $\omega$ méretű klikk, így ezen (tehát az aktuális $G-\{a_i\}$) gráf $\omega$ színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz. Ez pontosan annyit jelent, hogy $B_i \cap A_j \neq \emptyset$ minden $j \neq 0$-ra. Eszerint az előbbi $B_i$ csakis $B_0$ lehet, és valóban egyedül $A_0$-tól diszjunkt.

Legyen most $B_i$ olyan, hogy $A_0 \cap B_i \neq \emptyset$, s a két halmaz egyetlen közös eleme legyen $a_k$. Ekkor $B_i$ továbbra is $\omega$ méretű klikk lesz minden olyan $G-\{a_j\}$ gráfban, amire $j \neq k$. Ezek $\omega$ színnel való színezésekor tehát $B_i$ metszi az összes színosztályt. A $G-\{a_k\}$ gráfban pedig $B_i$-ből egy $\omega-1$ méretű klikk marad meg, tehát ennek a gráfnak az $\omega$ színnel történő színezésekor $B_i$ egy kivételével minden színosztályt metsz. Ez azt jelenti, hogy az $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha\omega}$ független halmazok közül $B_i$ ismét csak pontosan egytől lehet diszjunkt, ez pedig akkor csakis az az $A_i$ lehet, aminek párjául választottuk.

Ezzel beláttuk, hogy a két megadott halmazrendszer rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, így a 2. Lemma is bizonyítást nyert.

*3. Lemma:* Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_m$ és $B_1, B_2, \ldots, B_m$ egy $n$-elemű halmaz részhalmazai, melyekre teljesül, hogy

$$\forall i \ A_i \cap B_i = \emptyset,$$

és

$$\forall i \neq j \ |A_i \cap B_j| = 1.$$

Ekkor $m \leq n$.

*A 3. Lemma bizonyítása:* Legyenek adva a lemma feltételeinek eleget tevő $A_1, A_2, \ldots, A_m$ és $B_1, B_2, \ldots, B_m$ részhalmazrendszerek.

Legyen $\mathbf{A}$ az az $m$-szer $n$-es mátrix, amelynek sorai a $A_i$ halmazok ún. karakterisztikus vektorai. Ez annyit jelent, hogy e mátrix $i$-edik sorának $j$-edik eleme 1, ha az alaphalmaz $j$-edik eleme benne van $A_i$-ben, és 0, ha nincs. Hasonlóan, legyen $\mathbf{B}$ az az $n$-szer $m$ méretű mátrix, melynek oszlopai a $B_i$ halmazok karakterisztikus vektorai. (Tehát $\mathbf{B}$-ben az $i$-edik sor $j$-edik eleme 1, ha az alaphalmaz $i$-edik eleme benne van $B_j$-ben és 0, ha nincs benne.)

A $\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ $m$-szer $m$-es mátrix $i$-edik sorának $j$-edik eleme éppen $|A_i \cap B_j|$ lesz. Az $A_i$-k és $B_j$-k feltételezett metsződési tulajdonságai szerint tehát $\mathbf{C}$ olyan négyzetes mátrix, melyben a főátlóban csupa 0, azon kívül mindenütt 1 áll. Ebből következik, hogy $C$ teljes rangú, vagyis $rk(\mathbf{C}) = m$.

(Az, hogy $\mathbf{C}$ teljes rangú, vagyis oszlopai lineárisan függetlenek így látható be. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{C}$-t alkotó $\mathbf{c_i}$ oszlopoknak valamely $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{c_i}$ lineáris kombinációja $\mathbf{0}$. Mivel $\mathbf{c_i}$-ben az $i$-edik koordináta 0, de minden más $\mathbf{c_j}$-ben 1, $\sum_{j=1, j\neq i}^{m} \lambda_i = 0$, és ez minden $i$-re teljesül. Tehát a $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j$ összegből bármely $\lambda_j$-t elhagyjuk a maradék összeg 0. Ez csak úgy lehet, ha minden $\lambda_j$ egyenlő, akkor pedig mindegyik 0 lehet csak. Ebből következően a nullvektor fenti felírása csakis a triviális felírás lehet, tehát $\mathbf{C}$ oszlopai valóban lineárisan függetlenek.)

A szorzás során a $\mathbf{B}$ mátrix oszlopai által generált térből az $\mathbf{A}$ által megjelenített lineáris transzformációval képezünk le vektorokat. A képteret generálják $\mathbf{B}$ oszlopainak képei, vagyis $\mathbf{C}$ oszlopai. A képtér dimenziója így éppen $\mathbf{C}$ rangja, és ez nem lehet nagyobb, mint az eredeti tér dimenziója, ami viszont éppen $\mathbf{B}$ rangja. Tehát $rk(\mathbf{C}) \leq rk(\mathbf{B})$. Ide beírva $rk(\mathbf{C}) = m$-et $rk(\mathbf{B}) \geq m$ adódik, ami viszont (lévén $\mathbf{B}$ $m$-szer $n$-es mátrix) csak úgy lehetséges, ha $m \leq n$. Ez volt a lemma állítása.

*A Tétel bizonyításának befejezése:*

Ha $G$ minimális imperfekt gráf, akkor a 2. Lemma szerint létezik $G$ csúcshalmazának két olyan, egyenként $\alpha\omega + 1$ méretű részhalmazrendszere, amely kielégíti a 3. Lemma részhalmazrendszereire vonatkozó feltételt. (A 2. Lemma kimondásakor csak annyit kötöttünk ki, hogy a megfelelő metszetek üresek, vagy sem, de a bizonyítás során megjegyeztük, hogy a nemüres $A_i \cap B_j$ metszetek mérete mindig 1, hiszen egy klikk és egy független halmaz nem metszheti egymást több pontban.) Alkalmazhatjuk tehát a 3. Lemmát $m$ helyébe $\alpha\omega+1$-et, $n$ helyébe $|V(G)|$-t írva. Azt kaptuk tehát, hogy minimálisan imperfekt $G$ gráfra $\alpha(G)\omega(G)+1 \leq |V(G)$. Pontosan ennyi hiányzott a bizonyítás befejezéséhez, ezzel tehát készen vagyunk.