Kérdés: Legfeljebb hány éle lehet egy n-csúcsú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz háromszöget?

Általánosabb kérdés: Legfeljebb hány éle lehet egy n-csúcsú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz k csúcsú teljes részgráfot? (Itt k valamilyen rögzített pozitív egész.)

Az utóbbi kérdésre Turán Pál híres tétele ad választ. Mielőtt ezt kimondanánk, külön megválaszoljuk a kérdést arra a speciális esetre, amire a fenti első kérdés vonatkozik. Az ezen speciális esetre vonatkozó tételt Turán előtt már Mantel is bebizonyította.

Tétel: Ha egy n-csúcsú egyszerű gráf nem tartalmaz háromszöget, akkor éleinek száma legfeljebb $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Bizonyítás: Legyen G olyan n-csúcsú gráf, amely nem tartalmaz háromszöget. Vegyük észre, hogy ekkor tetszőleges $v \in V(G)$ csúcs szomszédsága független halmazt alkot, hiszen, ha bármely két szomszéd össze volna kötve éllel, létrejönne egy háromszög. Ha viszont minden pont szomszédsága független halmaz, akkor tetszőleges pont fokszáma alulról becsli a gráf $\alpha(G)$ függetlenségi számát. Speciálisan a maximális $\Delta(G)$ fokszámra is felírhatjuk tehát, hogy $\alpha(G) \geq \Delta(G)$.

Minden gráfra, így G-re is igaz, hogy $|E(G)| \leq \tau(G)\Delta(G)$, ahol $\tau(G)$ (szokás szerint) az összes élet lefogó pontok egy minimális méretű halmazának elemszáma. A fenti egyenlőtlenség azért igaz, mert egy lefogó pontrendszer minden pontjában összeadva a fokszámokat az összes élet megszámoljuk legalább egyszer. Az így kapható egyenlőtlenségben a fokszámokat felülről $\Delta(G)$-vel becsülve éppen az előbb kimondott egyenlőtlenség adódik.

Most felhasználjuk az I. Gallai-azonosságot, miszerint hurokélmentes gráfban $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$. Az előbbiekből $V(G)$ helyébe n-et írva így az alábbi adódik:

$$|E(G)| \leq \tau(G)\Delta(G) \leq \tau(G)\alpha(G) = (n - \alpha(G))\alpha(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség annak az ismert ténynek a következménye, hogy ha két pozitív szám összege állandó, akkor szorzatuk annál nagyobb, minél közelebb esnek egymáshoz. Ezzel az állítást igazoltuk.

A fenti tétel becslése éles, hiszen könnyű megadni olyan n-csúcsú háromszögmentes gráfot, aminek éppen $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ éle van. Ilyen az az n-csúcsú teljes páros gráf, melyben a két pontosztály mérete a lehető legközelebb van egymáshoz. A következő, általánosabb tételben azt is ki fogjuk mondani, hogy ez az egyetlen ilyen gráf.

Bevezetünk két jelölést. Legyen $T_r(n)$ az az n-csúcsú gráf, amelynek csúcsai a lehető legegyenletesebben be vannak osztva r darab osztályba (tehát minden osztály elemszáma $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ vagy $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$), az osztályokon belül nincsenek élek, viszont bármely két különböző osztálybeli pont össze van kötve. (Ezt a gráfot Turán Pál tiszteletére szokás n-csúcsú r osztályú Turán-gráfnak is hívni, a jelölésbeli T erre utal.) Jelölje továbbá $T_r(n)$ élszámát $t_r(n)$.

Turán tétele: Ha G olyan n-csúcsú egyszerű gráf mely nem tartalmaz r-csúcsú teljes részgráfot, akkor

$$|E(G)| \leq t_{r-1}(n).$$

Egyenlőség csak abban az esetben állhat, ha G izomorf $T_{r-1}(n)$-nel.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy $T_{r-1}(n)$ nem tartalmaz K_r-et hiszen bármely r pontja közül legalább kettő ugyanazon osztályba esik, és így nincs összekötve. A fenti tétel állítása az, hogy ez a legtöbb élet tartalmazó K_r-mentes gráf, bármely más K_r-et nem tartalmazó egyszerű gráfnak szigorúan kevesebb éle van.

Bizonyítás: A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Ha $n = 1, 2, \ldots, r-1$, akkor nyilván mind az $\binom{n}{2}$ élet behúzhatjuk anélkül, hogy K_r jönne létre, így éppen a megfelelő Turán-gráfot kapjuk, és valóban minden más lehetséges gráfnak ugyanennyi ponton kevesebb éle van. Tehát $n \leq r-1$ esetén igaz az állítás.

Tegyük fel most, hogy már igazoltuk a tételt minden $n < k$-ra, ahol $k \geq r$, most belátjuk $n = k$-ra is.

Legyen G olyan K_r-mentes k-csúcsú gráf, melynek a lehető legtöbb éle van. Mivel $k \geq r$, G nem lehet teljes gráf, így biztosan van két összekötetlen csúcsa. Ezeket összekötve keletkezne egy K_r (másképp G élszáma nem volna maximális), ezért biztos, hogy G tartalmaz K_{r-1} részgráfot. Legyenek egy ilyen részgráf csúcsai

$u_1, \ldots, u_{r-1}$, ezek halmazát nevezzük U-nak. Most külön-külön megbecsüljük az olyan élek számát, amelyek mindkét végpontja U-ban vagy mindkét végpontja $(V(G) - U)$-ban van, illetve az olyanokét, amelyek egy U-beli és egy $(V(G) - U)$-beli pontot kötnek össze.

Mivel U-n teljes részgráfunk van, az U-n belül futó élek száma pontosan $\binom{r-1}{2}$. A $V(G) - U$ halmazon feszített részgráf nem tartalmazhat K_r-et és csúcsainak száma $k - r + 1$, ezért az indukciós feltevés szerint az itt futó élek száma legfeljebb $t_{r-1}(k - r + 1)$. A $V(G) - U$ halmazba eső egyik pont sem lehet összekötve az összes U-beli csúccsal, mert akkor azokkal együtt egy K_r-et hozna létre. A $(V(G) - U)$-beli csúcsok mindegyikéből legfeljebb $r - 2$ él mehet tehát U-beli ponthoz. Mivel $|V(G) - U| = k - r + 1$, az összes ilyen tipusú élek száma legfeljebb $(k - r + 1)(r - 2)$. Mivel így G minden lehetséges élét számbavettük, azt kaptuk, hogy

$$|E(G)| \leq \binom{r-1}{2} + t_{r-1}(k - r + 1) + (k - r + 1)(r - 2).$$

Pusztán annyit kell észrevennünk, hogy a jobboldalon álló összeg éppen $t_{r-1}(k)$-val egyenlő. Ezt legegyszerűbben úgy ellenőrizhetjük, ha elképzeljük $T_{r-1}(k)$ egy példányát és ebből gondolatban leválasztunk egy olyan $(r - 1)$-elemű U csúcshalmazt, amely klikket alkot. A $T_{r-1}(k)$-ból U leválasztása után éppen egy $T_{r-1}(k - r + 1)$ gráf marad meg, aminek $t_{r-1}(k - r + 1)$ éle van. Ezen rész minden pontjából pontosan $r - 2$ él fut U-beli ponthoz, és természetesen az U-n belül futó élek száma éppen $\binom{r-1}{2}$. Ezzel azt kaptuk, hogy a fenti becslésben mindenütt egyenlőség áll, ha $G = T_{r-1}(k)$, vagyis beláttuk, hogy $|E(G)| \leq t_{r-1}(k)$.

Azt kell még belátnunk, hogy G-nek csakis akkor lehet $t_{r-1}(k)$ éle, ha izomorf $T_{r-1}(k)$-val. Ha G-nek $t_{r-1}(k)$ éle van, akkor az előbbi becslésben egyenlőség áll. Ez azt jelenti, hogy $G - U$ olyan $k - r + 1$ csúcsú K_r-mentes gráf, melynek a lehető legtöbb éle van, továbbá $G - U$ minden csúcsa pontosan $(r - 2)$ darab U-beli csúccsal van összekötve. Indukciós feltevésünk alapján az első feltételből következik, hogy $G - U$ izomorf $T_{r-1}(k - r + 1)$-gyel. A második feltétel alapján $G - U$ csúcsaihoz hozzárendelhetjük azt az egyetlen U-beli csúcsot, amivel az nincsen összekötve. Ha a $(V(G) - U)$-n feszített $T_{r-1}(k - r + 1)$-nek lenne két különböző osztályába eső csúcsa, amihez ugyanazt az U-beli csúcsot rendeltük, akkor ezek ketten U velük összekötött másik $r - 2$ csúcsával együtt egy K_r-et alkotnának, ami ellentmondás. Eszerint U minden csúcsa csak egyetlen $(G - U)$-beli osztály csúcsaihoz lehet rendelve. Mivel pedig U-nak pontosan annyi csúcsa van, ahány osztálya $(G - U)$-nak, így ez a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, vagyis $G - U$ valamely osztályának összes csúcsa U ugyanazon csúcsával nincs összekötve. Eszerint U csúcsait ezen velük össze nem kötött pontok osztályához hozzávéve éppen egy $T_{r-1}(k)$ gráfot kapunk, G tehát evvel izomorf. Ezt kellett bizonyítani.