PONTRA ÉS IRÁNYRA NÉZVE KONVEX GÖRBE ÉS FELÜLET

SÓS VERA (Budapest)*

A pontra és irányra nézve konvex görbe fogalmával az egyrétű függvényekre vonatkozó vizsgálódásokkal (Bieberbach-sejtéssel) kapcsolatban találkozunk. Jelen előadás kiindulópontja is *Rényi Alfréd* egy rokon tárgyú dolgozata[1], amelyre felhívta figyelmemet és ösztönzött arra, hogy ezzel a témakörrel foglalkozzam. *Rényi* ebben a dolgozatában többek között bebizonyítja, hogy ha az $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ egységsugarú kör belsejében analitikus és egyrétű függvényre teljesül, hogy az $|z| = 1$ kör $f(z)$ által létesített képének totális irányváltozása $< 4\pi$, akkor $|a_n| \leqq n$. Ehhez pedig a következő segédtételt bizonyítja be (analitikus úton):

Ha egy egyszeresen összefüggő tartományt határoló g Jordan-görbe totális irányváltozása $< 4\pi$, akkor van olyan irány, amellyel párhuzamos minden egyenesnek legfeljebb két közös pontja van a görbével.

Ezen előadás célja a konvexitás síkgörbére és felületre vonatkozó általánosításainak definiálása után, meghatározni azokat a pontokat, irányokat, amelyekre nézve egy síkgörbe, illetve felület az általánosított értelemben konvex. Majd ebből adódóan is bebizonyítjuk *Rényi A.* előbb idézett elégséges feltételét arra vonatkozóan, hogy létezzék olyan irány, amelyre nézve egy zárt síkgörbe konvex, továbbá a többi esetre vonatkozóan is megadunk elégséges feltételt arra, hogy egy zárt síkgörbe, illetve felület általános értelemben véve konvex legyen.

A) Konvexitás általánosítása görbékre

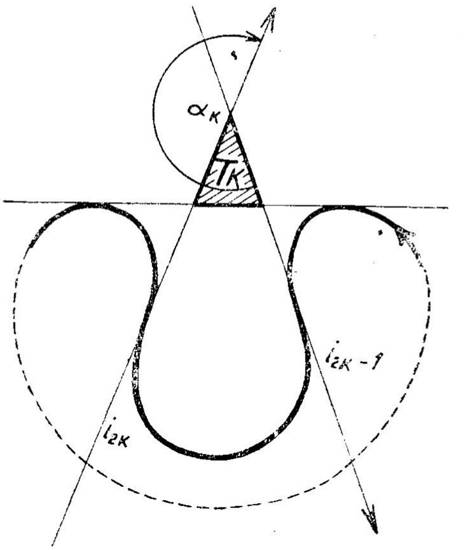
1. *definíció: Egy zárt síkgörbe egy P pontra nézve konvex, ha a P ponton áthaladó minden egyenesnek legfeljebb két közös pontja van a görbével (legfeljebb egy közös szakasza a görbe által határolt tartománnyal).*

A pontra nézve konvexitást végtelen távoli pontra kiterjesztve jutunk az irányra nézve konvex görbe fogalmához:

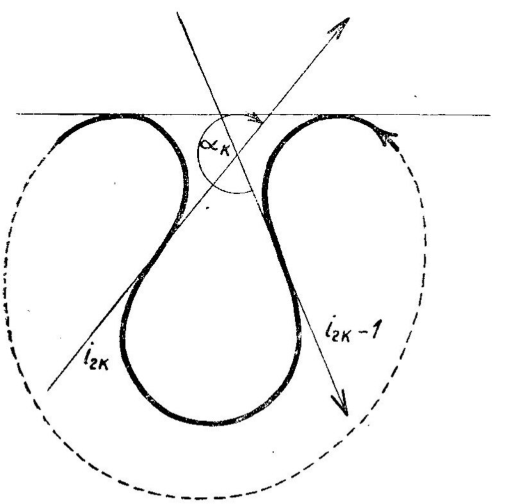
*1950. augusztus 28-án tartott előadás.

[1] *A. Rényi*: On the coefficients of schlicht functions, *Publ. Math.*, *1* (1949), 18—23.

3. $\alpha_k > \pi$ esetben az előbbi háromszög, vagy üres tartomány, aszerint, hogy az i_{2k-1}, i_{2k} érintők metszéspontja a k legkisebb konvex burkon kívül, illetve belül van (4a—4b ábra).



4a. ábra



4b. ábra

I. tétel: A g görbéhez tartozó T_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ tartományok közös részének, a T tartománynak a pontjai, és csak ezek a pontok azok, amelyekre nézve e görbe konvex. A T tartomány legfeljebb két összefüggő konvex (nem feltétlenül véges) tartományból áll.

Tekintsünk előbb olyan g görbét, amelyik egy konvex és egy konkáv szakaszból tevődik össze, és emellett még az 1. $(\alpha = \pi)$ speciális eset áll fenn. Legyenek a T_1-et meghatározó e támaszegyenes és az i_1, i_2 inflexiós érintők érintési pontjai P_1, P_2, P_3, P_4. Ha egy l egyenes négy pontban metszi a g görbét, akkor a $\overset{\frown}{P_1 P_4}$ görbeszakaszt legalább két pontban metszi. Ez viszont azt vonja maga után, hogy az l egyenes minden pontjából húzható a görbe $\overset{\frown}{P_1 P_4}$ szakaszához érintő egyenes. De nyilvánvalóan a T tartomány egy pontján sem megy keresztül a $\overset{\frown}{P_1 P_4}$ görbeszakasz valamely érintője; tehát a T tartomány minden pontjára nézve a görbe konvex. Másrészt viszont, ha P egy a T tartományon kívüli pont, akkor vagy a PP_2, PP_3 egyenesek közül legalább az egyiknek van g-vel kettőnél több közös pontja, vagy, amennyiben a P pont a G tartományon kívül, de k-n belül van, akkor az e ponton áthaladó, e-vel párhuzamos egyenesnek van kettőnél több közös pontja g-vel.

Az 1. esetben alkalmazott okoskodás mintájára látható be 2., 3. esetekben is az állítás. Továbbá ebből egyszerű meggondolással adódik a tétel arra az általános esetre vonatkozóan is, amikor a görbe több konkáv és konvex szakaszból tevődik össze.

II. tétel: Ha $\alpha_k \leqq \pi$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, akkor a β_k irányintervallumok közös részébe eső irányok és csak ezek az irányok azok, amelyeknek a pontjaira nézve a görbe konvex. Ha legalább egy $\alpha > \pi$ van, akkor nincs olyan irány, amelyre nézve a görbe konvex.

E tétel közvetlenül belátható az I. tételből, ha figyelembe vesszük, hogy azok az irányok, amelyekre nézve a görbe konvex, tulajdonképpen a T tartomány végtelen távoli pontjaihoz tartozó irányok.

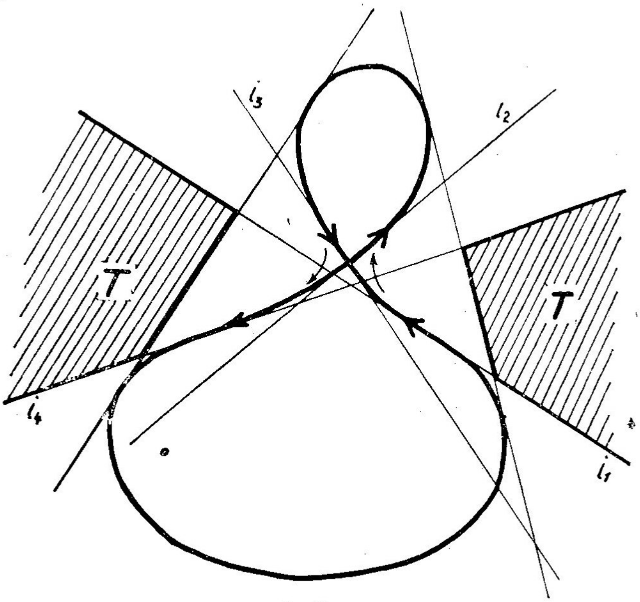
A II. tételnek még egy másik közvetlen bizonyítását is adjuk, mivel ebből egyszerűen adódik a fentebb említett *Rényi*-féle — és az ennek megfelelő pontra nézve konvex görbére vonatkozó — elégséges feltétel.

Ahelyett, hogy azt vizsgálnánk, melyek azok az irányok, amelyekkel párhuzamos minden egyenesnek legfeljebb két közös pontja van a görbével, azt az ezzel ekvivalens tulajdonságát vizsgáljuk, hogy milyen irányú érintőből húzható a görbéhez kettő és csak kettő (többszörösen véve számításba azokat az érintőket, amelyek több pontban érintenek).

Ehhez tekintsük a görbének a következő, a görbe érintőjének irányváltozását demonstráló, egységsugarú körre való leképezését:

A görbe egy P pontjának a P pontbeli érintővel azonos irányú sugarat, illetve annak végpontját feleltetjük meg. Ha a P pontban csak külön jobb- és baloldali érintő létezik, akkor a P pontnak az ezekkel azonos irányú sugarak által határolt körívet feleltetjük meg. Az ily módon kapott körkép, mint könnyen belátható, páratlan sokszorosan fedett ívszakaszokból tevődik össze. Az egyes többszörösen fedett ívszakaszok határpontjai az inflexiós pontok képei. Egy konkáv szakaszhoz tartozó két inflexiós pont képe által határolt szakasz hossza a_k. Minden többszörösen fedett ívszakasz hozzátartozik ezeknek az a_k hosszúságúaknak valamelyikéhez.

Tehát azok az irányok, amelyekkel párhuzamos minden egyenesnek legfeljebb két közös pontja van a görbével, vagyis amelyekkel párhuzamos érintője a görbének csak kettő van, vagy tovább menve, amely irányú átmérőnek a körképen mindkét végpontja csak egyszeresen van fedve, azok lesznek, amelyek a többszörösen fedett a_k hosszúságú ívszakaszok, illetve az ezeknek megfelelő irányintervallumok egyikébe sem tartoznak. Azaz éppen azok, amelyek a kiegészítő β_k (zárt) irányintervallumoknak mindegyikébe tartoznak.



5. ábra

Az előbb említett *Rényi*-féle és az ennek megfelelő pontra nézve konvex görbére vonatkozó elégséges feltétel a következő:

III. tétel: Ha a totális irányváltozás 4 π-nél kisebb, akkor van olyan pont és olyan irány, amelyre nézve a görbe konvex.

Bizonyítás: A görbe totális irányváltozása: $\int |d\alpha|$ (ahol α a görbe érintőjének szögváltozása) nem más, mint a körkép ívhossza, ν-szeresen véve számításba a ν-szeresen fedett ívszakaszokat.

Jelöljük a ν-szeresen fedett szakaszok hosszösszegét a_ν-vel. Ekkor nyilván

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots = 2\pi \tag{1}$$

és ha I jelenti a görbe totális irányváltozását

$$I = a_1 + 3\,a_3 + 5\,a_5 + 7\,a_7 + \ldots < 4\,\pi \tag{2}$$

(1) háromszorosából (2)-t levonva:

$$2\,a_1 - 2\,a_5 - 4\,a_7 - \ldots > 2\,\pi$$

és így $a_1 < \pi$. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy van olyan irány, amellyel párhuzamos átmérő mindkét végpontja egyszeresen van fedve. Erre az irányra nézve a görbe konvex.

Megjegyzés: 1. Az I., II. és III.-hoz hasonló tételek mondhatók ki abban az esetben is, ha *a)* önmagát metsző összefüggő görbét vizsgálunk; ekkor az inflexiós érintőkön kívül figyelembe kell venni a metszéspontbeli érintőket,[2] *b)* nem zárt görbe esetén, azt vizsgálva, mely ponton átmenő (iránnyal párhuzamos) egyeneseknek van a görbével legfeljebb egy közös pontjuk, figyelembe kell venni a végpontokban levő érintőket is, *c)* több görbét vizsgálva, figyelembe kell venni a görbék páronkénti közös érintőit.

2. Ugyancsak hasonló tételek mondhatók ki arra vonatkozóan, hogy mely pontokon átmenő (iránnyal párhuzamos) egyeneseknek van legfeljebb $2k$ közös pontjuk a görbével. Egy elégséges feltétel arra vonatkozóan, hogy létezzék ilyen pont (irány), az, hogy a görbe totális irányváltozása $< 2(k+1)\pi$ egyen.

B) Konvexitás általánosítása felületre

A konvexitás felületre vonatkozó általánosítására két út is lehetséges, a konvex felületnek két ekvivalens definíciójából kiindulva: 1. minden sík egyszerű görbében metszi a felületet, 2. minden egyenesnek legfeljebb két közös pontja van a felülettel.

A következőkben topológiailag gömbbel homeomorf, és a rövidség kedvéért differenciálhatóan parametrizálható (F) felületre szorítkozunk. Könnyen belátható, hogy hasonló módon, mint síkgörbénél, differenciálhatóság helyett itt is elegendő feltenni, hogy a felület minden pontjában léteznek támaszsíkok, s hogy minden pontban a felület minden síkmetszetének létezik jobb- és baloldali érintője.

A többféle módon lehetséges általánosítások és ezzel kapcsolatos tételek közül egyet, a legegyszerűbben adódót említjük. Ez, a többitől függetlenül is, II. és III.-hoz analóg módon, a felület szférikus képe segítségével tárgyalható. A felület normálisai által létesített szférikus képről tudjuk, hogy a szférikus képen a többszörösen fedett tartományok a felület hiperbolikus pontjainak és kívülről konkáv elliptikus pontjainak megfelelő tartományok. Ezeket a felület parabolikus pontjainak képei határolják. Legyenek ezen többszörösen fedett, a parabolikus pontok képei által határolt tartományok, amelyek t. i. egy-egy iránytartományt határoznak meg, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ezek kiegészítőtartományai pedig $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

[2] A görbén az 5. ábrán látható irányítással haladva végig a kettőspont már nem mint metszéspont szerepel.

3. *definíció: Egy zárt felület egy adott irányra (síkállásra) nézve konvex, ha minden, az adott irányra merőleges (az adott síkállással párhuzamos) sík a felületet egyszerű zárt görbében metszi.*

IV. tétel: Azokra és csak azokra az irányokra nézve konvex az F felület, amelyek a β_k iránytartományok közös részébe tartoznak.

A II. tételhez hasonlóan, ahelyett, hogy azt vizsgálnánk, melyek azok az irányok, amelyre merőleges minden sík a felületet egyszerű zárt görbében metszi, azokat az ezzel ekvivalens tulajdonságú irányokat tekintjük, amelyekre merőleges érintősíkja a felületnek csak kettő van.

V. tétel: Ha a felület totális görbülete, a szférikus kép felszíne, $< 8\pi$. *van olyan irány, amelyre nézve a felület konvex.*

Ennek bizonyítását szintén nem részletezzük, III.-hoz teljesen hasonló módon bizonyítható.

Megjegyzés. 3. Ugyanerre az eredményre juthatunk a görbére vonatkozó I.-hez hasonló tételeken keresztül, ha a síkbeli 1.—2. definícióhoz hasonlóan definiáljuk a pontra nézve konvex felületet.

4. Azt is mondhatjuk, hogy egy adott egyenesre nézve konvex a felület, ha minden, az adott egyenesen átmenő sík a felületet egyszerű görbében metszi. A 3. definíció ennek speciális eseteként fogható fel és tárgyalható.

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВЫПУКЛЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И НАПРАВЛЕНИЯ

В. ШОШ (Будапешт)

Выпуклость может быть обобщена следующим образом:

1. Замкнутая плоская кривая выпукла относительно точки, если любая прямая проходящая через эту точку, имеет с кривой не более двух общих точек.

2. В случае бесконечно удаленной точки получаем понятие выпуклой кривой относительно направления.

В случае поверхности можно дать разные обобщения; мы упоминаем лишь самое простое:

3. Замкнутая поверхность выпукла относительно данного направления, если каждая плоскость, перпендикулярная к данному направлению, пересекает поверхность в кривой, ограничивающей односвязную область.

В докладе даются те точки и направления, относительно которых замкнутая кривая Жордана, имеющая во всякой точке левую и правую касательную (или поверхность, удовлетворяющая сходным условиям) выпукла в обобщенном смысле.

В первом случае эти точки P (рис. 2, 3, 4a—4b) являются общей частью областей T_k образованных касательных в точках перегиба i_{2k-1}, i_2, относящиеся к вогнутым отрезкам кривой и наименьшей выпуклой кривой, содержащей данную кривую. Направления (2) бесконечно удаленные точки этих областей.

Заметим, что так же можно доказывать соответствующие теоремы в случае, если исследуем а) кривые с многократными точками, б) незамкнутые кривые, в) несколько кривых, а также в том случае, когда исследуем, какие прямые имеют с данной прямой не более двух общих точек.

В случае поверхности роль касательных играют касательные плоскости в параболических точках.

А. Реньи в статье, занимающейся однолистных функции: On the coefficients of schlicht functions, *Publ. Math. Debrecen*, *1* (1949), 18—23, доказывает, что если полное изменение направления кривой $< 4\pi$, то существует такое направление, относительно которого кривая выпукла. Из предыдущего элементарно доказываем это достаточное условие Реньи, а также соответствующее условие для выпуклости, относительно точки. Для поверхности в случае 3) дается соответствующее достаточное условие (с 8π вместо 4π).

ON CURVES AND SURFACES WHICH ARE CONVEX WITH RESPECT TO A POINT OR DIRECTION

By VERA SÓS (Budapest)

In the theory of schlicht functions one meets the notion of convexity with respect to a point or direction. Also, this lecture has its origin in a paper of *A. Rényi*[3] on this subject. *Rényi* proves in analytic way a lemma which gives a sufficient condition for the existence of a direction with respect to which a Jordan curve is convex.

A) Generalizations of convexity for plane curves

Definition 1. A closed plane curve is *convex with respect to a point P*, if any straight line through P has at most two points common with the curve.

Definition 2. A closed plane curve is *convex with respect to a direction* if any straight line in this direction has at most two points common with the curve.

In the theorems we restrict ourselves to curves not intersecting themselves and having a right as well as a left side tangent in every point.

Let g be a closed Jordan curve and k the boundary of its smallest convex cover. We fix a positive direction on them. Let $i_1, i_2, \ldots, i_m$ be the

[3] *A. Rényi*, On the coefficients of schlicht functions, *Publ. Math.*, *1* (1949), 18—23.

»inflexion tangents«[4] of g (clearly $m = 2n$) such that i_{2k-1} and i_{2k} belong to the same from outside concave piece of arc. We denote by α_k the angle which carries i_{2k-1} into i_{2k} by a negative rotation; let further $\beta_k = \pi - \alpha_k$ (figure 1). Finally let T_k be the domain bounded by i_{2k-1}, i_{2k} and k (see figures 2, 3, 4a, 4b).

Theorem I. *The intersection T of these T_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ belonging to g consists of exactly those points with respect to which g is convex.*

Theorem II. *The intersection of the direction intervals β_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ contains those and only those directions with respect to which g is convex.*

The proofs of theorems I and II are given by elementary methods. We give also another proof of theorem II, independently of the proof of theorem I, by means of the circular image of the tangents of g. Instead of seeking for the directions with respect to which g is convex, we deal with the equivalent problem of determining all directions parallel to which g has two and only two tangents. With this elementary method we prove newly the theorem of *Rényi* and an analogous sufficient condition for the convexity with respect to a point.

Theorem III. *If the boundary rotation of the curve is $< 4\pi$, then there is a direction (as well as a point) with respect to which g is convex.*

Remarks. 1) One may formulate theorems analogous to theorems I, II and III even in the following cases: *a)* the curve g intersects itself; then we have to take into account besides the inflexion tangents also the tangents in the points of intersection; *b)* the curve g ist not closed and *c)* if we consider simultaneously several curves, then the common tangents must also be taken into consideration.

2) Similar theorems hold for the case if we consider straight lines having at most $2k$ common points with a curve g. A sufficient condition for the existence of a point or a direction with respect to which a curve is convex in this sense, is that the boundary rotation should be $< 2(k+1)\pi$.

B) Generalizations of convexity for surfaces

For surfaces there are several ways of generalizing the concept of convexity. We consider the simplest one which is the following.

Definition 3. A closed surface is *convex with respect to a direction* if all planes perpendicular to this direction intersect the surface in a simply connected curve.

The directions with the stated properties may be determined by making use of the spherical image of the surface. In this case the tangent planes in parabolic points play the roles of the inflexion tangents. Theorem III has an analogue in this case with 8π instead of 4π.

[4] »Inflexion tangent« means a right or left side tangent which intersects the curve in the point of contact.