A lánctörtek egy geometriai interpretációja és alkalmazásai

T. Sós Vera

1. Huygens a naprendszer egy mechanikai modelljének megkonstruálásakor a következő problémához jutott: olyan fogaskerekeket kellett szerkesztenie, amelyek fokszámainak aránya megegyezik a reprezentált bolygók keringési idejének hányadosával. Mivel a fogaskerekek száma tulságosan nagy nem lehetett, a következő approximációs kérdés állott elő:

Előírt α pozitív valós számhoz és N pozitív egészhez meghatározandók a p, q pozitív egészek,[1] *hogy $q \leq N$ megkötés mellett $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ a lehető legkisebb legyen.*

Ez a kérdés tekinthető a diophantikus approximáció elméletében a kiindulási problémának. A diophantikus approximáció fejlődése azonban arra vezetett, hogy az előbbi probléma megoldása helyett azon q egész számok lettek meghatározva és karakterizálva, amelyekre adott α és N mellett, a $q \leqq N$ megkötés esetén $|q\alpha - p|$ a lehető legkisebb.

Tudva azt, hogy $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ minden irracionális α számra végtelen sok p, q egésszel $\frac{1}{q^2}$ rendben válik kicsivé — és hogy ugyanez $\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$-re ($\varepsilon > 0$) már nem áll fenn; az előbbi approximációs kérdéseken túl felmerül a $q\,|q\alpha - p|$ kifejezést minimizáló $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ egészek meghatározása és ezek karakterizálása is.

[1] A következőkben mindig p, q, N pozitív egész számot, α pozitív valós számot jelöl.

Így egy irracionális α szám racionálissal való approximálásának fenti értelemben a következő három formája lép fel:

$$\text{A)} \quad \min_{0<q\leqq N} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

$$\text{B)} \quad \min_{0<q\leqq N} |q\alpha - p|$$

$$\text{C)} \quad \min_{0<q\leqq N} q\,|q\alpha - p|$$

illetve a megfelelő minimizáló q számok meghatározása.

A B) probléma megoldását kiadják a lánctörtelmélet klasszikus alaptételei. A lánctörtelmélet leggyakoribb felépítési módja a következő: az α szám reguláris lánctörtkifejtésének[2] értelmezése után az ebből nyerhető lánctörtnevezőkre[2] kimutatható, hogy az α számot B) alatti értelemben legjobban approximálják, majd ezeknek a lánctörtkifejtésből eredőleg további tulajdonságai határozhatók meg. Ennél természetesebb felépítés újabban W. J. LeVeque [1][3] és W. S. Cassels [2] könyveiben található. E két felépítés eltérő, de közös abban a lényegben, hogy mindkettő az α számot B) alatti értelemben legjobban approximáló $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ számokból indul ki. A $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ számok e karakterizálásából kiindulva határozzák meg ezek további tulajdonságait és a lánctörtnevezőkkel való azonosságukat.

[2] Egy α szám reguláris lánctörtkifejtése ennek

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_k + \cdots}}}$$

alakú előállítása, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ pozitív egészek. A

$$\frac{P_k}{Q_k} = \cfrac{1}{a_1 + \cdots \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}$$

részlettörtek α közelítőtörtjei, az ezek által meghatározott $Q_1, \ldots Q_k, \ldots$ számok α lánctörtnevezői. α melléktörtjei a $\dfrac{P_{k-1} + \nu P_k}{Q_{k-1} + \nu Q_k}$ $(\nu = 1, \ldots, a_k - 1)$ számok, melléknevezői a $Q_{k-1} + \nu Q_k$ $(\nu = 1, 2, \ldots, a_k - 1)$ számok.

[3] A nevek után [ ]-ban álló számok a dolgozat végén levő irodalomjegyzékre utalnak.

E dolgozat 2. fejezetében megadjuk a lánctörtnevezőknek egy, az előzőektől eltérő, geometriai szemléleten alapuló értelmezését,[4] ahol ugyancsak a B) értelemben való legjobban approximáló $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ számok egy interpretálásából kiindulva adjuk meg ezek további karakterizálását és bizonyítjuk be a lánctörtnevezőkkel való azonosságukat. Ezen felépítés abban is eltér az előzőektől, hogy itt kiindulásként tulajdonképpen nemcsak a lánctörtnevezők, hanem az ún. melléknevezők[2] is szerepelnek. Hogy a melléknevezőknek is — a lánctörtnevezők mellett — lényeges szerepük van, azt éppen az A) probléma megoldása mutatja. A lánctörteknek ezen felépítése több más szempontból is hasznosnak mutatkozik.[5]

Az A) problémát illetően, annak ellenére, hogy történetileg is ez a kiinduló kérdés, tudomásunk szerint ennek teljes megoldása csak [9]-ben szerepel.

A III. tételben bebizonyítjuk Perron eredményét. A bizonyításban felhasználjuk a 2. fejezet eredményeit, ill. egy abból következő tételt, amely lényegében a következőt mondja ki: Jelentse (x) az x valós szám törtrészét. Az $(\alpha), (2\alpha), \ldots, (N\alpha)$ számok nagyságszerinti sorrendje ezek legkisebb és legnagyobbikának multiplumából, azaz a $\min\limits_{0<l\leqq N} (l\alpha) = (l_1\alpha)$, $\max\limits_{0<l\leqq N} (l\alpha) = (l_N\alpha)$ jelöléssel l_1 és l_N ismeretéből explicite megadható.

A 4. fejezetben a C. kérdésre adunk választ, amely a lánctörtelmélet ismert tételeiből egyszerűen következik; ezt azonban a teljesség kedvéért itt bizonyítjuk.

2. Legyen a következőkben mindig az egyszerűség kedvéért $0 < \alpha < 1$ és α irracionális. Az egységkerületű K kör kerületére egy 0 kezdőpontból kiindulva pozitív irányban felmérjük az α hoszszuságú ívet 1-szer, 2-szer, ..., n-szer, ... Az igy kapott ívek végpontjait α-, 2α-, ..., $n\alpha$-, ... pontnak nevezzük.

1. MEGJEGYZÉS: Gyakran fogjuk használni az α-, 2α-, ..., $n\alpha$-, ... pontrendszernek azt a tulajdonságát, hogy az $m\alpha$ és $n\alpha$-pontok $(m > n)$ közötti, K körön vett irányított távolság megegyezik az $(m-n)\alpha$- és 0-pontok közötti irányított távolsággal. Másszóval az $m\alpha$- és $n\alpha$-pontok „beleforgathatók" az $(m-n)\alpha$- és 0-pontokba.

[4] Ez vázolva van már [3] és [4]-ben, amennyiben ezekben erre támaszkodtunk.

[5] Így például a lánctörtnevezőknek és melléknevezőknek itt következő értelmezése kiterjeszthető a diophantikus approximáció inhomogén esetére vonatkozólag, amelynek segítségével az eddigi eredmények egységes tárgyalásán túl egyes új eredmények érhetők el. [3], [4], [5], [6]

DEFINÍCIÓ. „0-val szomszédosnak“ nevezünk egy $s\alpha$-pontot, ill. a megfelelő s multiplumot, ha a K kör kerületén a 0 és $s\alpha$-pontok által határolt két zárt körív egyikébe nem esik $n\alpha$-pont $n < s$ esetén.

A következőkben az alábbi jelöléseket fogjuk használni:

Az egymásután fellépő „0-val szomszédos“ multiplumokat

$$1 = s_1 < s_2 < \cdots < s_\nu < \cdots \tag{2.1}$$

-vel jelöljük. A megfelelő *irányított* „üres“ íveket — amelybe nem esik $n < s_\nu$ esetén $n\alpha$-pont, — Δ_ν-vel jelöljük, ahol Δ_ν pozitív ill. negatív aszerint, hogy a 0 pontból pozitív ill. negatív irányban indul ki. A következőkben helyenként az $s_\nu\alpha$-pontot a Δ_ν ív végpontjának nevezzük.

A Δ_ν „üres“ ív *előjeles* hosszát δ_ν-vel jelöljük. δ_ν előjele Δ_ν előjelével azonos.

A „0-val szomszédos“ $s_\nu\alpha$-pontok közül azokat, amelyekre $|\delta_\nu| < |\delta_l|$ $l = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ esetén, „közelítő“ pontnak, a megfelelő s_ν multiplumot „közelítő“ multiplumnak nevezzük. A „0-val szomszédos“ s_ν multiplumok ezen részsorozatára a

$$q_1 \equiv s_{\nu_1},\ q_2 \equiv s_{\nu_2}, \ldots, q_k \equiv s_{\nu_k}, \ldots$$

jelölést, a $\delta_1, \ldots, \delta_\nu, \ldots$ sorozat megfelelő részsorozatára a

$$d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots$$

jelölést használjuk.[6] A későbbiek miatt célszerű még $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ esetén a $q_1 = q_2 = 1$ értelmezés. A $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ multiplumok értelmezéséből következik, hogy

$$|d_1| \leqq |d_2| < \cdots < |d_k| < \cdots \tag{2.2}$$

Megjegyezzük, hogy minden fix q esetén

$$\min_p |q\alpha - p| = \min |(q\alpha), 1 - (q\alpha)| \tag{2.3}$$

és e minimum $(q\alpha) \leqq \frac{1}{2}$ esetén $p = [q\alpha]$-val, $(q\alpha) \geqq \frac{1}{2}$ esetén $p = [q\alpha] + 1$-el éretik el. $q = q_k$ esetén ezen minimizáló p egész számot p_k-val jelöljük. $k > 1$ esetén nyilvánvalóan

$$|d_k| = |q_k\alpha - p_k| \tag{2.4}$$

és $s_\nu > q_2$ esetén

$$|\delta_\nu| = \min_p |s_\nu\alpha - p| \tag{2.5}$$

[6] Irracionális α esetén, mivel, mint ismeretes, az $n\alpha$-pontok mindenütt sűrűn vannak, a $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ sorozat végtelen.

Tetszőleges q esetén a

(2.6) $$t_q = \min_p |q\alpha - p|$$

jelölést használjuk.

A „0-val szomszédos“ s_ν multiplumok és az ezek közül kiválasztott q_k „közeli“ multiplumok értelmezéséből következik, hogy a $q\alpha$-pontok közül, $q < q_k$ esetén a $q_k\alpha$ pont van a 0 ponthoz legközelebb. (A többi $s_\nu\alpha$-pont a 0 ponthoz egyik ill. másik oldalról legközelebbi pontok az előbbi értelemben.) Ez egyúttal azt is jelenti, hogy *az így értelmezett $q_1, \ldots, q_\nu$ multiplumok approximálják a a legjobban az α számot a* B) *alatti értelemben.*

A fenti módon értelmezett s_ν „0-val szomszédos“ és a legjobban approximáló q_k „közeli“ multiplumok karakterizálását és lánctörtnevezőkkel, ill. melléknevezőkkel való azonosságát nyerjük a következő tételek alapján.

I. LEMMA. *Legyenek az α-, 2α-, $\ldots$, $s_\nu\alpha$-pontok közül a 0-ponthoz pozitív, ill. negatív irányból legközelebbi pontok (0 pontot közrefogó pontok) az $s_\nu\alpha$ és $s_{\nu-l}\alpha$ pontok (l pozitív egész). Ekkor a következő rekurzív formulák állnak fenn:*

(2.7) $$s_{\nu+1} = s_\nu + s_{\nu-l}$$

(2.8) $$\delta_{\nu+1} = \delta_\nu + \delta_{\nu-l}$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $q\alpha$ egy, a $\Delta_\nu + \Delta_{\nu-l}$ ívbe eső pont. Az „0-val szomszédos“ multiplumok értelmezéséből következőleg $q > s_\nu$. Mivel a $\Delta_\nu + \Delta_{\nu-l}$ ív hossza $|\delta_\nu| + |\delta_{\nu-l}|$, a következő két eset valamelyike áll fenn:

a) az $q\alpha$-pont és $s_\nu\alpha$-pont körön való távolsága — a $\Delta_\nu + \Delta_{\nu-l}$ íven belül tekintve — nem nagyobb, mint $|\delta_{\nu-l}|$

b) az $q\alpha$-pont és $s_{\nu-l}\alpha$-pont körön való távolsága — előbbi értelemben — kisebb, mint $|\delta_\nu|$.

Az a) esetben, mivel a $q\alpha$ és $s_\nu\alpha$ pontok közötti irányított távolság az 1. megjegyzés értelmében ugyanaz, mint az $(q - s_\nu)\alpha$- és 0-pontok közötti irányított távolság, így, mivel ez a távolság nem nagyobb, mint $|\delta_{\nu-l}|$, az $(q - s_\nu)\alpha$-pont a $\Delta_{\nu-l}$ ívben van. Ezért, $s_{\nu-l}$ definíciójából következőleg

$$q - s_\nu \geqq s_{\nu-l}$$

$$q \geqq s_\nu + s_{\nu-l}$$

A b) esetben hasonlóan nyerhető, hogy

$$q > s_\nu + s_{\nu-l}$$

Tehát a legkisebb q multiplumú pont, amely a $\Delta_\nu + \Delta_{\nu-l}$ ívbe eshet, az $(s_\nu + s_{\nu-l})\alpha$-pont. Az 1. megjegyzés miatt ez valóban ezen ívbe esik, ami a (2. 7) formulát igazolja. Ugyancsak az 1. megjegyzés miatt ez maga után vonja a (2. 8) formula teljesülését.

Az I. lemma jelentésére és következményére vonatkozólag a következőket jegyezzük meg.

2. MEGJEGYZÉS. Az $s_{\nu+1}\alpha$-pont az 0-pontból kiinduló két „üres" ív, Δ_ν és $\Delta_{\nu-l}$ közül a nagyobbik ívbe kerül, mégpedig úgy nyerhető, hogy ezen abszolút értékben nagyobb ív végpontjából az abszolút értékben kisebb ívet visszamérjük. Ebből következik, hogy az $s_{\nu+1}\alpha$-pont akkor és csak akkor van az $\Delta_{\nu-l}$ ívben, ha $|\delta_\nu| < |\delta_{\nu-l}|$, azaz ha $0 < j < \nu$ esetén $|\delta_\nu| < |\delta_j|$. Ezért a q_k közelítő multiplumok értelmezése equivalens a következővel:

egy 0-val szomszédos s_ν multiplum akkor közelítő q_k multiplum, ha $\delta_\nu \cdot \delta_{\nu+1} < 0$[7].

I. TÉTEL *Az α számhoz tartozó q_k „közeli" multiplumok megegyeznek α lánctörtnevezőivel, a többi „0-val szomszédos" s_ν multiplum megegyezik α mellékneveződivel. Az $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ lánctörtjegyek*[2] *azonosak az*

$$\left[\left|\frac{d_{k-1}}{d_k}\right|\right] = a'_k \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2. 9}$$

módon értelmezett $a'_1, \ldots, a'_k$, számokkal, ahol értelmezés szerint $d_0 = -1$.

BIZONYÍTÁS. A tétel állításait azáltal bizonyítjuk be, hogy igazoljuk az

$$q_{k+1} = q_{k-1} + a_k q_k$$

továbbá $q_{k-1} < s_\nu < q_k$ esetén

$$s_\nu = q_{k-1} + r q_k \qquad 0 < r < a_k$$

rekurzív formulák fennálását.

2. MEGJEGYZÉSből következik, hogy az α-, 2α-, $\ldots$, $q_k\alpha$-pontok közül nem esik pont a 0 és $q_{k-1}\alpha$-pontok közé, a $\Delta_{\nu_{k-1}}$ ívbe. Ezért, tekintetbe véve I. lemmát, a legkisebb multiplumú pont, amely ebbe az ívbe esik, az $s_{\nu_k+1}\alpha$-pont;

$$s_{\nu_k+1} = q_{k-1} + q_k$$

$$\delta_{\nu_k+1} = d_{k-1} + d_k$$

$$|\delta_{\nu_k+1}| = |d_{k-1}| - |d_k|$$

[7] Azaz ha az $s_{\nu+1}\alpha$-pont és az $s_\nu\alpha$-pont a 0 ponttal átellenes oldalról szomszédosak.

a'_k-nek (2. 9) alatti értelmezése miatt

(2. 10) $$|d_{k-1}| - r|d_k| > |d_k|, \quad \text{ha} \quad 0 < r < a'_k$$

(2. 11) $$|d_{k-1}| - a'_k|d_k| < |d_k|.$$

Ezért I. lemma szukcesszív alkalmazásával kapjuk, hogy

(2. 12) $$s_{\nu_k+r} = q_{k-1} + rq_k$$

(2. 13) $$|\delta_{\nu_k+r}| = |d_{k-1}| - r|d_k| \qquad 0 < r \leqq a'_k$$
$$|\delta_{\nu_k+r}| = |d_{k-1}| - r|d_k|.$$

(2. 10) miatt a $s_{\nu_k+r}\alpha$-pontok $0 < r \leqq a'_k$ mellett még mind az $\Delta_{\nu_{k-1}}$ ívben vannak, (2. 11) miatt az $s_{\nu_k+a'_k+1}\alpha$-pont már a Δ_{ν_k} ívben van, és így

(2. 14) $$q_{k+1} = s_{\nu_k+a'_k} = q_{k-1} + a'_k q_k$$

(2. 15) $$d_{k+1} = \delta_{\nu_k+a'_k} = d_{k-1} + a'_k d_k$$

(2. 16) $$|d_{k+1}| = |d_{k-1}| - a'_k|d_k|.$$ [8]

Az (2. 16) rekurzív formulákból és a'_k (2. 9) alatti értelmezéséből nyilvánvalóan adódik ezeknek az a_k lánctörtjegyekkel való azonossága.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

3. MEGJEGYZÉS. A I. tétel bizonyításából következik, hogy az I. lemmában értelmezett, 0 pontot „közrefogó" s_ν és $s_{\nu-l}$ multiplumok mindig a következő alakúak:

$$s_{\nu-l} = q_k$$
$$s_\nu = q_{k-1} + rq_k \qquad 0 < r \leqq a_k,$$

alkalmas r és k-val. Ugyancsak következik a bizonyításból, hogy a $d_1, \ldots, d_k, \ldots$ sorozat váltakozó előjelű.

3. II. TÉTEL. *Az $\alpha, 2\alpha, \ldots, N\alpha$ pontok közül a 0 pontot I. lemma alatti értelemben „közrefogó" két pont legyen a $q_k\alpha$- és $(q_{k-1}+rq_k)\alpha$-pont $(1 \leqq r \leqq a_k)$, ahol tehát $q_{k-1}+rq_k \leqq N < q_{k-1} + (r+1)q_k$. A 0 pontból d_k irányába haladva a körön egymás-után következő multiplumok legyenek*

$$k_1 \equiv q_k, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N \equiv q_{k-1} + rq_k.$$

k_1 és k_N az $1, 2, \ldots, N$ számok $k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N$ permutációját

[8] (2. 12)—(2. 16)-ból egyszerűen kimutatható a $P_{k+1} = P_{k-1} + a_k P_k$ rekurzív formulák fennállása.

egyértelműen meghatározzák, éspedig:

a) $k_{l+1} = k_l$ *ha* $0 \leqq k_l \leqq (N - q_k)$

b) $k_{l+1} = k_l - (q_{k-1} + rq_k - q_k)$ *ha* $N - q_k < k_l < q_{k-1} + rq_k$

c) $k_{l+1} = k_l - (q_{k-1} + rq_k)$ *ha* $q_{k-1} + rq_k \leqq k_l \leqq N$.[9]

BIZONYÍTÁS. Külön-külön bizonyítjuk be az a), *b*) és c) eseteket, a következő állítás bizonyítása útján: Ha egy $q\alpha$-pont $k_l\alpha$- és az állítólagos $k_{l+1}\alpha$-pont közé esik, akkor szükségképpen $q > N$.

a) külön nézzük az $q < k_l$ és külön az $q > k_l$ esetet. Ha $q > k_l$ akkor az 1. megjegyzés értelmében az

$$k_l\alpha\text{-},\ q\alpha\text{-},\ (k_l + q_k)\alpha\text{-}$$

pontok beleforgathatók az

$$0, (q - k_l)\alpha\text{-},\ q_k\alpha\text{-}$$

pontokba. Ezért, q_k definíciójából következőleg

$$q - k_l > N,$$

azaz

$$q > N.$$

A $q < q_k$ esetben, alkalmazva az 1. megjegyzést, az

$$(k_l + q_k)\alpha\text{-},\ q\alpha$$

pontok beleforgathatók az

$$(k_l + q_k - q)\alpha\text{-},\ 0\text{-}$$

pontokba, és ezért q_k definíciójából következik, hogy

$$k_l + q_k - q > N$$

és így az is, hogy $k_l + q_k > N$. Ez azonban k_l a) alatti értékével van ellentmondásban.

b) 1. megjegyzés miatt az

$$k_l\alpha\text{-},\ q\alpha\text{-},\ (k_l + q_k - (q_{k-1} + rq_k))\alpha\text{-}$$

pontok beleforgathatók az

$$(q_{k-1} + rq_k)\alpha\text{-},\ (q + (q_{k-1} + rq_k) - k_l)\alpha\text{-},\ q_k\alpha\text{-}$$

pontokba. $q_{k-1} + rq_k \geqq k_l$ miatt $q + q_{k-1} + rq_k - k_l \geqq 0$ (2. 7) miatt

$$q + (q_{k-1} + rq_k) - k_l \geqq (q_{k-1} + rq_k) + q_k.$$

Ebből k_l b) alatti értéke miatt következik, hogy

$$q > N.$$

[9] E tételre egy második bizonyítást adott Surányi János, l. [8].

c) Ismét külön nézzük az $q > k_l - (q_{k-1} + rq_k)$ és $q < k_l - (q_{k-1} + rq_k)$ eseteket. Az első esetben, 1. megjegyzés miatt a

$$k_l\alpha\text{-},\quad q\alpha\text{-},\quad (k_l - (q_{k-1} + rq_k))\alpha\text{-}$$

pontok beleforgathatók az

$$(q_{k-1} + rq_k)\alpha\text{-},\ (q - k_l + q_{k-1} + rq_k)\alpha\text{-},\ 0$$

pontokba. Így $q_{k-1} + rq_k$ definíciójából következik, hogy

$$q - k_l + q_{k-1} + rq > N$$

Ezért $k_l \geqq q_{k-1} + rq_k$ miatt ebben az esetben $q > N$. A $q < k_l - (q_{k-1} + rq_k)$ esetben, mivel a

$$k_l\alpha\text{-},\ q\alpha\text{-}$$

pontok beleforgathatók a

$$(k_l - q)\alpha\text{-},\ 0\text{-}$$

pontokba, ezért a $(k_l - q)\alpha$ pont az $q_{k-1} + rq_k$ és 0 pontok közé esik, és így $q_{k-1} + rq_k$ értelmezéséből következik, hogy

$$k_l - q > N$$

ami ellentmond annak, hogy $k_l \leq N$.

Ezzel a II. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy e tételből következik a többek által bizonyított[10] H. Steinhaustól eredő következő meglepő sejtés:

A K körön az $0, \alpha\text{-}, 2\alpha\text{-}, \ldots, N\alpha$-pontok által meghatározott $N+1$ diszjunkt ívek hossza legfeljebb három különböző értéket vehet fel (minden α és N esetén).

a), b) és c)-ből ugyanis, 1. megjegyzés értelmében következik — e három különböző ívhossz karakterizálását is megadva —, hogy a szereplő $N+1$ diszjunkt ív mindegyikének hossza a

$$|d_k|,\ |d_{k-1}| - r|d_k|,\ |d_{k-1}| - (r-1)|d_k|$$

értékek valamelyikével egyezik meg.

Látható, hogy $N = s_{\nu+1} - 1 = q_{k-1} + (r+1)q_k - 1$ esetén nincs a b) esetnek megfelelő k_l szám, azaz minden ν-re,

a $0, \alpha\text{-}, 2\alpha\text{-}, \ldots, (s_{\nu+1} - 1)\alpha$ *pontok által keletkezett diszjunkt ív között csak két különböző hosszúságú ív van;* $|d_k|$ *és* $|d_{k-1}| - r|d_k|$ *hosszúságú.*

Ebben az esetben a két különböző ívhosszúság egymásutánja, a $k_1, k_2, \ldots, k_N$ permutáció egyszerűbben felírható explicite.

[10] E sejtést bebizonyították még Erdős P., Hajós Gy., N. Swieczkowsky, Surányi J. [8] és Szüsz P.

Ebből annyit, amennyire a III. tételben szükségünk lesz, a következőkben adjuk meg:

Az $N = s_{\nu+1} - 1 = q_{k+1} + (r+1)q_k - 1$ esetben a szereplő a) és c) esetek a következőképpen alakulnak:

a) $k_{l+1} = k_l + q_k$, ha $0 \leqq k_l < q_{k-1} + rq_k$

c) $k_{l+1} = k_l - (q_{k-1} + rq_k)$,

$$\text{ha} \quad q_{k-1} + rq_k \leqq k_l \leqq q_{k-1} + (r+1)q_k - 1.$$

$k_1 = q_k < q_{k-1} + rq_k$ miatt $k_2 = 2q_k$ és hasonlóan

$$k_i = q_{k-1} + iq \quad \text{ha} \quad 0 < i \leqq r+1.$$

$k_{r+1} = (r+1)q_k > q_{k-1} + rq_k$ miatt

$$k_{r+2} = (r+1)q_k - (q_{k-1} + rq_k) = q_k - q_{k-1},$$

majd ismét $k_{r+2} < q_{k-1} + rq_k$ miatt $k_{r+3} = k_{r+2} + q_k = 2q_k - q_{k-1}$, s ez a meghatározás hasonló módon folytatható. A 0 pontból sig $n\, d_k$ irányban haladva tehát az egymásután következő pontok a

(3. 1) $\quad 0\text{-},\ q_k\alpha\text{-}, \ldots, ((r+1)q_k)\alpha\text{-},\ (q_k - q_{k-1})\alpha\text{-},\ (2q_k - q_{k-1})\alpha\text{-}, \ldots,$

pontok.

Ugyancsak egyszerűen meghatározható a 0 pontból sig $n\,(-d_k)$ irányban haladva az egymásután fellépő $k_N, k_{N-1}, \ldots$ multiplumú pontok. Ekkor a) vagy c)-ből k_{l+1} értékéből kiindulva kell k_l értékét meghatározni. Így pl.

$$k_N \equiv k_{s_{\nu+1}-1} = q_{k-1} + rq_k;$$

$$k_{s_{\nu+1}-1} - q_k = q_{k-1} + (r-1)q_k < q_{k-1} + rq_k$$

miatt

$$k_{s_{\nu+1}-2} = q_{k-1} + (r-1)q_k$$

és hasonlóan, ha $0 < i \leqq r+1$, akkor

$$k_{s_{\nu+1}-i} = q_{k-1} + rq_k - (i-1)q_k = q_{k-1} + (r-i+1)q_k.$$

Továbbá,

$$k_{s_{\nu+1}-(r+1)} - q_k = q_{k-1} - q_k < 0$$

miatt

$$k_{s_{\nu+1}-(r+2)} = q_{k-1} + (q_{k-1} + rq).$$

A további r pontra ismét

$$k_{s_{\nu+1}-(r+2+i)} = 2q_{k-1} + (r-i)q_k \qquad \text{ha} \quad 0 < i \leqq r.$$

A szerint, hogy $k_{s_{\nu+1}-(2r+2)} = 2q_{k-1} < q_k$ ill. $2q_{k-1} > q_k$,

$$k_{s_{\nu+1}-(2r+3)} = 2q_{k-1} + q_{k-1} + rq_k, \quad \text{ill.} \quad k_{s_{\nu+1}-(2r+3)} = 2q_{k-1} - q_k.$$

Tehát az 0 pontból sig $n(-d_k)$ irányban haladva, az egymásután fellépő pontok a

(3. 2) $\quad 0$-, $(q_{k-1}+rq_k)\alpha$-, $(q_{k-1}+(r-1)q_k)\alpha$-, $\ldots$, $q_{k-1}\alpha$-,

$(2q_{k-1}+rq_k)\alpha$-, $\ldots$, $2q_{k-1}\alpha$-, $(3q_{k-1}+rq_k)\alpha$-, $(3q_{k-1}+(r-1)q_k)\alpha$-, $\ldots$

pontok, amennyiben $2q_{k-1}<q_k$ és hasonlóan $2q_{k-1}>q_k$ esetén a

(3. 3) $\quad 0$-, $(q_{k-1}+rq_k)\alpha$-, $(q_{k-1}+(r-1)q_k)\alpha$-, $\ldots$, $q_{k-1}\alpha$-,

$(2q_{k-1}+rq_k)\alpha$-, $\ldots$, $2q_{k-1}\alpha$-, $(2q_{k-1}-q_k)\alpha$-, $(3q_{k-1}+(r-1)q_k)\alpha$-, $\ldots$

pontok. Orientáció végett, bár erre nem lesz a későbbiekben szükség, megjegyezzük, hogy az $0, \alpha$-, 2α-, $\ldots$, $(s_{\nu+1}-1)\alpha$ pontok által létrejött diszjunkt ívek hosszának az eloszlása tehát a következő jellegű:

r-szer ill. $(r+1)$-szer egymásután szerepel $|d_k|$ hosszúságú ív, majd egy $|d_{k-1}|-r|d_k|$ hosszúságú ív, ez után ismét r ill. $(r+1)$-szer egy $|d_k|$ hosszúságú ív, s. i. t.

(Ha $N\neq s_{\nu+1}-1$, akkor is az ívek hosszának egymásutánja hasonló jellegű, mindössze azzal a különbséggel, hogy bizonyos $|d_{k-1}|-r|d_k|$ hosszúságú ívek helyén egy $|d_{k-1}|-(r-1)|d_k|$ hosszúságú ív szerepel.)

III. TÉTEL *Legyen az adott N számhoz k és r értéke*

$$q_{k-1}+rq_k \leqq N < q_{k-1}+(r+1)q_k \qquad 0<r\leqq a_k$$

által meghatározva. Ezekkel

$$\min_{0<q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| = \left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|, \qquad \text{ha } r\leqq \frac{a_k}{2}+\left|\frac{d_{k-1}}{d_k}\right|-\frac{q_{k-1}}{q_k}$$

$$\min_{0<q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| = \left|\alpha-\frac{p_{k-1}+rp_k}{q_{k-1}+rq_k}\right|, \qquad \text{ha } r> \frac{a_k}{2}+\left|\frac{d_{k+1}}{d_k}\right|-\frac{q_{k-1}}{q_k}.$$ [11]

BIZONYÍTÁS. Legyen $s_\nu\equiv q_{k-1}+rq_k$ és így $s_{\nu+1}\equiv q_{k-1}+$ $+(r+1)q_k$. Először bebizonyítjuk, hogy $|\delta_\nu|$, $|d_k|$, t_q (2. 4), (2. 5), (2. 6) alatti jelentései mellett

$$\min_{0<q<s_{\nu+1}}\frac{t_q}{q} = \min\left(\frac{|\delta_\nu|}{s_\nu}.\ \frac{|d_k|}{q_k}\right). \tag{3. 4}$$

[11] Mivel $\left|\frac{d_{k+1}}{d_k}\right|-\frac{q_{k-1}}{q_k}$ nyilván ± 1 közé esik, lényegében az számít, hogy $r<\frac{a_k}{2}$ ill. $r>\frac{a_k}{2}$.

$\frac{t_q}{q}$ értékére (3. 1), (3. 2), (3. 3) alapján a következőképpen lehet alsó becslést kapni. (3. 1) következtében az 0 pontból sig nd_k irányban haladva, az $0, \alpha$-, 2α-, ..., $(s_{\nu+1}-1)\alpha$ pontok által létrejött, egymás-után következő diszjunkt ívek hossza rendre

$$\underbrace{|d_k|, |d_k|, \ldots, |d_k|}_{(r+1)\text{-szer}}, \quad |\delta_\nu|, |d_k|, \ldots$$

és így a $k_1\alpha$-, $k_2\alpha$-, ..., pontoknak 0 ponttól való „távolságai" $t_{k_1}, t_{k_2}, \ldots$ rendre

$$(3.5) \quad |d_k|, \ldots, (r+1)|d_k|, (r+1)|d_k| + |\delta_\nu|, (r+2)|d_k| + |\delta_\nu|, \ldots$$

Hasonlóan (3. 2) és (3. 3)-ból, az 0 ponttól sig $n|-d_k|$ irányban egymásután következő diszjunkt ívek hossza rendre a $2q_{k-1} < q_k$ esetben

$$|\delta_\nu|, \underbrace{|d_k|, \ldots, |d_k|}_{r\text{-szer}}, |\delta_\nu|, \underbrace{|d_k|, \ldots, |d_k|}_{r\text{-szer}}, |\delta_\nu|, |d_k|, \ldots.$$

ill. a $2q_{k-1} > q_k$ esetben

$$|\delta_\nu|, \underbrace{|d_k|, \ldots, |d_k|}_{r\text{-szer}}, |\delta_\nu|, \underbrace{|d_k|, \ldots, |d_k|}_{(r+1)\text{-szer}}, |\delta_\nu|, |d_k|, \ldots.$$

Ebből a megfelelő $k_{s_{\nu+1}-1}, k_{s_{\nu+1}-2}, \ldots$ pontoknak 0 ponttól való „távolsága" rendre

$$(3.6) \quad |\delta_\nu|, |\delta_\nu| + |d_k|, \ldots, |\delta_\nu| + r|d_k|, 2|\delta_\nu| + r|d_k|,$$
$$2|\delta_\nu| + (r+1)|d_k|, \ldots, 2|\delta_\nu| + 2r|d_k|, 3|\delta_\nu| + 2r|d_k|,$$
$$3|\delta_\nu| + (2r+1)|d_k|, \ldots$$

ill.

$$(3.7) \quad |\delta_\nu|, |\delta_\nu| + |d_k|, \ldots, |\delta_\nu| + r|d_k|, 2|\delta_\nu| + r|d_k|, \ldots,$$
$$2|\delta_\nu| + (r+1)|d_k|, \ldots, 2|\delta_\nu| + 2r|d_k|, 2|\delta_\nu| + (2r+1)|d_k|, \ldots.$$

(3. 5), (3. 6) és (3. 7)-ből következik, hogy az 0 pontból sign d_k ill. sign $(-d_k)$ irányban haladva, az (3. 1) alatti első $r+2$ számú, ill, a (3. 2) ill. (3. 3) alatti első $2r+4$, ill. $2r+3$ számú, „kivételes" pontoktól eltekintve valamennyi $q\alpha$ potra $t_q > (r+2)|d_k|$. Ezért mindenesetre ezen pontokra

$$q \leqq s_{\nu+1} - 1 = q_{k-1} + (r+1)q_k - 1 < (r+2)q_k$$

miatt

$$(3.8) \quad \frac{t_q}{q} > \frac{(r+2)|d_k|}{(r+2)q_k} = \frac{|d_k|}{q_k}.$$

A „kivételes“ (3. 1), (3. 2) és (3. 3) alatti pontok esetében közvetlenül külön-külön bizonyíthatók be a megfelelő egyenlőtlenségek. Így pl.

$$q = q_{k-1} + (r-i)q_k \qquad (0 < i \leqq r)$$

esetén

$$t_q = |\delta_\nu| + i|d_k|$$

és így

$$\frac{t_q}{q} = \frac{|\delta_\nu| + i|d_k|}{q_{k-1} + (r-i)q_k} > \frac{|\delta_\nu|}{q_{k-1} + rq_k} = \frac{|\delta_\nu|}{s_\nu}.$$

Hasonlóan bizonyíthatók be a megfelelő egyenlőtlenségek a többi kivételes pont esetében is. Ezek (3. 8)-al együttesen a (3. 4) egyenlőtlenség érvényességét igazolják.

Ezzel a feladat redukálva van $\min\left(\frac{|\delta_\nu|}{s_\nu}, \frac{|d_k|}{q_k}\right)$ meghatározására. Az (2. 10), (2. 11) rekurzív formulákból

$$\frac{|\delta_\nu|}{s_\nu} = \frac{|d_{k-1}| - r|d_k|}{q_{k-1} + rq_k} = \frac{|d_{k+1}| + (a_k - r)|d_k|}{q_{k-1} + rq_k} =$$

$$= \frac{|d_k|}{q_k} \cdot \frac{a_k - r + \left|\frac{d_{k-1}}{d_k}\right|}{r + \frac{q_{k-1}}{q_k}}$$

Ebből és (3. 4)-ből a tétel állítása következik.

4. A C. alatti kérdésre ad választ a

IV. Tétel.

$$\min_{0 < q \leqq N} q|q\alpha - p| = q_l|q_l\alpha - p_l|,$$

ahol $0 < q_l \leqq N$. *l értékére további megszorítás, mely minden irracionális α számra érvényes, nem adható meg. Ha k értékét $q_k \leqq N < q_{k+1}$ által határozzuk meg, l értéke — $l \leqq k$ mellett — az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ lánctörtjegyektől függ.*

Bizonyítás. Határozzuk meg a ν számot minden q pozitív egészre $q_\nu \leqq q < q_{\nu+1}$ által. q_ν értelmezéséből és 2. megjegyzésből t_q és $|d_\nu|$ (2. 4) és (2. 6) alatti jelentése mellett következik, hogy

$$t_q > |d_\nu| \qquad \text{ha } q_\nu < q < q_{\nu+1}.$$

Ebből $q > q_\nu$ miatt méginkább

$$q|q\alpha - p| > q_\nu|q_\nu\alpha - p_\nu|.$$

Ebből viszont következik, hogy

$$\min_{0<q\leqq N} q|q\alpha-p| = \min_{0<q_\nu\leqq N} q_\nu|q_\nu\alpha-p_\nu|$$

Mivel az (2. 12), (2. 13) rekurzív formulákból könnyen kimutathatólag

$$\frac{1}{a_\nu+\frac{1}{a_{\nu+1}}}<q_\nu|q_\nu\alpha-p_\nu|<\frac{1}{a_\nu},$$

$\min\limits_{0<q_\nu\leqq N} q_\nu|q_\nu\alpha-p_\nu|$, ill. l értéke a tétel állításának megfelelően az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ lánctörtjegyektől függ.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] W. J. LEVEQUE: Topics in number theory. Addison-Wesley Publishing Company, INC. 1956.

[2] W. S. CASSELS: An introduction to diophantine approximation. Cambr. Tracts. No. 45. (1957).

[3] VERA T. SÓS: On diophantine approximation. I. (On a problem of A. OSTROVSKI). Acta Matematika Hung. Tom. VIII. fasc. 3—4. p. 461—472.

[4] VERA T. SÓS: On the distribution mod 1 of the seqence n α. Annales Universitatis Sc. Eötvös Lorand nominatae Sect. Math. 1957. In press.

[5] VERA T. SÓS: On the theory of diophantine approximation II. Acta Mathematica Hung. In press.

[6] VERA T. SÓS: On a theorem of A. Khintchine. Acta Arithmetica. In press.

[7] A. KHINTCHINE: Kettenbrüche. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig. 1956.

[8] J. SURÁNYI: Über die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl mod 1. Annales Universitatis Sc. Eötvös Lorand nominatae Sect. Math. 1957. In press.

[9] O. PERRON: Lehre von der Kettenbrüche. 1954.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ЦЕННЫХ ДРОБЕЙ

Вера Т. Шош

(Резюме)

Работа подробно дает одно геометрическое построение теории ценных дробей, которое было кратко изложено в работе [3]. В настоящей работе оно используется для решения следующей задачи. При данном положительном иррациональном x и натуральном N найти минимум величины $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$, если p и q целые числа и $1\leqq q\leqq N$. Решение дается следующей теоремой III.

Пусть $\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_k+}\cdots$ правильное разложение x в цепную дробь и пусть $\frac{p_k}{q_k}$ ее подходящие дроби. Для данного N единственным образом могут быть подобраны такие целы k и p, что

$$q_{k-1}+rq_k\leqq N<q_{k-1}+(r+1)q_k, 0<r\leqq a_k.$$

Тогда

$$\text{(1)}\qquad \min_{q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|,\ \text{если}\ 0<r<\frac{1}{2}a_k+\frac{|q_{k+1}\alpha-p_{k+1}|}{|q_k\alpha-p_k|}-\frac{q_{k-1}}{q_k},$$

и

$$\text{(2)}\qquad \min_{q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\left|\alpha-\frac{p_{k-1}+rp_k}{q_{k-1}+rq_k}\right|,\ \text{если}\ \frac{1}{2}a_k+$$

$$+\frac{|q_{k+1}\alpha-p_{k+1}|}{|q_k\alpha-p_k|}-\frac{q_{k-1}}{q_k}<r\leqq a_k$$

Заметим, что верхняя граница r в (1) имеет вид $\frac{1}{2}a_k\pm 1$. Основное орудие доказательства — теорема II., подробное доказательство которой, приведено и в [4] и согласно которой, если $(k_1,\ldots,k_N)$, то перестановка $(1,2,\ldots,N)$, для которой $0<(k_1\alpha)<(k_2\alpha)<\cdots<(k_N\alpha)<1$, то, зная k_1 и k_N, можно в явной форме представить всю перестановку $(k_1,k_2,\ldots,k_N)$.

Теорема IV связана с $\min\limits_{q\leqq N} q^2\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$.

ON A GEOMETRICAL THEORY OF CONTINUED FRACTIONS

VERA T. SÓS

The paper contains a detailed geometrical approach to the theory of continued fractions sketched in the paper [3] (Theorem I) This is applied to the solution of the problem to determine to any prescribed positive α and positive integer N the minimum of $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$ when p, q are positive integers with $1\leqq q\leqq N$. The result (theorem III.) runs in the usual language of the continued fractions as follows.

Let $\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots$ the regular continued fraction of α and $\frac{p_k}{q_k}$ $(k=1,2,\ldots)$ its convergents. To our given N we determine uniquely the integers k and r by

$$q_{k-1}+rq_k\leqq N<q_{k+1}+(r+1)q_k\qquad 0<r\leqq a_k.$$

Then we have

$$(1)\qquad \min_{q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right| \text{ for } 0<r<\frac{a_k}{a}+\left|\frac{q_{k+1}\alpha-p_{k+1}}{q_k\alpha-p_k}\right|-\frac{q_{k-1}}{q_k}$$

and

$$(2)\qquad \min_{q\leqq N}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\left|\alpha-\frac{p_{k-1}+rp_k}{q_{k-1}+rq_k}\right| \text{ for } \frac{a_k}{2}+$$

$$+\left|\frac{q_{k+1}\alpha-p_{k+1}}{q_k\alpha-p_k}\right|-\frac{q_{k-1}}{q_k}<r\leqq a_k$$

For the sake of orientation we remark thet the upper bound for r in (1) is between $\frac{a_k}{2}\pm 1$. The main tool in the proof is the theorem (theorem II.) of this paper, for which a detailed proof can be found in [4] according which if $(k_1,\ldots,k_N)$ is that permutation of $(1,2,\ldots,N)$ for which $0<(k_1\alpha)<(k_2\alpha)<$ $<\cdots<(k_N\alpha)<1$, then in the knowledge of k_1 and k_N the whole permutation $(k_1,\ldots,k_N)$ can be explicitely determined. Theorem IV. gives the explicite determination of

$$\min_{q\leqq N} q^2\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|.$$