ERDŐS PÁL: AZ EMBER ÉS A MATEMATIKUS (1913–1996)[1]

SIMONOVITS MIKLÓS ÉS T. SÓS VERA

1. Előszó

Erdős Pál a huszadik század egyik legkiemelkedőbb matematikusa volt.

Nemcsak a matematikusok körében, nemcsak a tudományos világban volt elismert és közismert, hanem egy sokkal szélesebb közönség előtt is, nemcsak Magyarországon, hanem szerte a világon.

Ebben a cikkben megkíséreljük Erdős Pált olyannak mutatni be, amilyennek *mi* láttuk. Nem próbáljuk matematikai munkásságát még csak vázlatosan sem ismertetni: ez messze túlmenne a kereteken. Évtizedekkel ezelőtt ezt részben már megtették ugyanitt, a Matematikai Lapok oldalain Turán Pál [71] és Hajnal András [48]. Ismertetünk néhány részletet Erdős munkásságából, elsősorban az egyszerűbben elmagyarázható kombinatorikai és számelméleti eredményeire szorítkozva. Matematikusi egyéniségével, stílusával és könnyebben megközelíthető eredményeivel az Olvasó egyebek között megismerkedhet több mint 30 a Matematikai Lapok számára írt cikkén keresztül.[2]

Erdős Pál már életében is legendává vált. Erős egyénisége, világos erkölcsi alapelvei, a matematikáért való rajongása, és a külvilág által meghatározott körülmények arra késztették, hogy egy teljesen szokatlan életformát alakítson ki magának. Erdős számára eltörpült a jelentősége az élet sok olyan részletének, amelyre a legtöbb ember igencsak odafigyel. Így hát nem meglepő, hogy egyes különcségeiről – időnként a valóságnak megfelelően, máskor túlozva – gyakran mesélnek ismerősei, illetve a róla szóló írások. Erdős az ilyen történetek közül bizonyosakkal nem törődött, másokra viszont szívesen emlékezett vissza, és ő is felidézte azokat,

[1] Ez a cikk a mátraházi „műhely" nyomán kiadott kötetben jelent meg eredetileg, angolul [64], Miklós Simonovits, Vera T. Sós: The Mathematics of Paul Erdős című cikkének erősen átdolgozott, magyar nyelvű változata. A fordítás Szász Réka munkája, az átdolgozást a szerzők végezték. Az eredeti cikk a Recent Trends in Combinatorics, The Legacy of Paul Erdős című kötet 9–20. oldalán jelent meg, eds.: Ervin Győri és Vera T. Sós (2000), copyright Cambridge University Press, Cambridge. A cikk sok ponton támaszkodik T. Sós [66] cikkére is.

[2] A cikk végén található egy lista Erdős a Matematikai Lapokban megjelent cikkeiről.

egyben hitelesítve is ezen anekdotákat. (Bizonyosak viszont kifejezetten bosszantották.) Mint ahogy ez a szenvedélyes zseniknél sajnos gyakran megtörténik, az írók a különcségeiről szóló történetek segítségével vélik megmutatni, hogy mennyire különleges ember volt. Azok számára viszont, akik Erdőst közelről ismerték, ezek a történetek talán mulatságosak, de messze nem ragadják meg személyiségének lényegét, ami nagyon is életközeli volt.

2. Erdős és a magyar matematika

A magyar matematikának több szempontból is óriási adottsága, hogy voltak kiemelkedő egyéniségei, akik világszínvonalra emelték. A magyar kultúra és a világkultúra, a magyar tudomány és a világtudomány kapcsolatának nagyon fontos és bonyolult kérdését nem lehet néhány mondatban, vagy néhány oldalon elintézni. Ebben a cikkben viszont ki kell emelnünk, hogy Erdős Pál egyike volt azon magyar matematikusoknak, akik a legtöbbet tették azért, hogy a magyar matematika világhíressé váljék, és hogy nagyszámú, nemzetközi szinten is elismert magyar matematikus nevelődjön ki.

Turán Pál, (aki egyetemi éveik óta egyik legjobb barátja volt Erdősnek) a következőket írta Erdős 50. születésnapjára, a Matematikai Lapokban, 1963-ban [71], hosszabb, matematikailag is igen érdekes cikke befejezéseként, szeretetet, elismerést némi élcelődéssel is vegyítve:

> „... 1958-ban Kossuth díjjal lett kitüntetve, 1956-ban a Magyar Tudományos Akadémia levelező-, majd 1961-ben rendes tagja lett. De hagyjuk a felsorolást; Erdős matematikai pályája felfelé ível, ha ma már csak másod- vagy harmadnaponként is ír csak egy dolgozatot. Hatása erősebb, mint valaha; ő a jelenkori magyar matematika egyik legerősebb stimulátora. Kívánjuk neki, hogy dolgozatainak száma szigorúan monoton növekedjék, olvasóinak pedig, hogy sajtóhibáinak száma szigorúan monoton fogyjon."

* * *

Erdős hatása nemcsak a kutatói szinten jelent meg. Csodagyerek volt és felnőtt korában nagy odafigyeléssel foglalkozott maga is csodagyerekekkel, tehetséges ifjakkal, és emellett gyakran adott elő tanároknak, vagy írt a Matematikai Lapok olvasóinak, legutóbb geometriáról, [32] azt megelőzően Pálfy Péter Pállal csoportokról, [37], és előtte még sok más cikket és megemlékezést, geometriáról, számelméletről, diofantikus approximációról, algebráról. Az egyik első, 1956-os „Mat-Lap" cikke két a Matematikai Lapok feladatrovatában feladott problémához kapcsolódik [33].

Liberális gondolat Lenin és Sztálin fényképe alatt: Erdős matematikáról beszél általános iskolásoknak Sztálinvárosban, 1955-ben

3. Mátraháza

Erdősnek élete eleme volt a konferenciákon való részvétel. Ezek az időszakok számára a pezsgő életet jelentették, azt, hogy matematikai problémákat diszkutálhatott, barátaival, kollégáival lehetett együtt. Az egyik első nemzetközi konferencia gráfelméletből Magyarországon volt, Dobogókőn, 1959-ben, majd a hatvanas években beindult a magyar kombinatorika és számelmélet konferencia-sorozat, melyek mindegyikén résztvett. Ezek közül is kiemelnénk az Erdős 60. 70. és 80. születésnapjára Magyarországon szervezett konferenciákat, [74], de emellett 80. születésnapjára konferenciát szerveztek a tiszteletére Cambridge-ben, Prágában, [75] és Kalamazoo-ban (USA) is.

Halála után 3 évvel, 1999-ben egy konferenciát szerveztünk emlékére a Magyar Tudományos Akadémia Roosevelt téri palotájában, 450 résztvevővel, 120 meghívott előadóval.[3] Az egész konferencia Erdősről szólt, a főelőadók Erdős matematikájáról tartottak áttekintő előadásokat, és a többi előadás is Erdős matematikájához kapcsolódott. Ezek többsége a közelmúltban két vastag kötetben, 1400 oldalon jelent meg a Bolyai János Matematikai Társulat és a Springer közös kiadásában [76].[4] A konferencia szervezésével az volt a célunk, hogy lehetőséget teremtsünk Erdős egyedülállóan széles spektrumú matematikai munkásságának bemutatására.

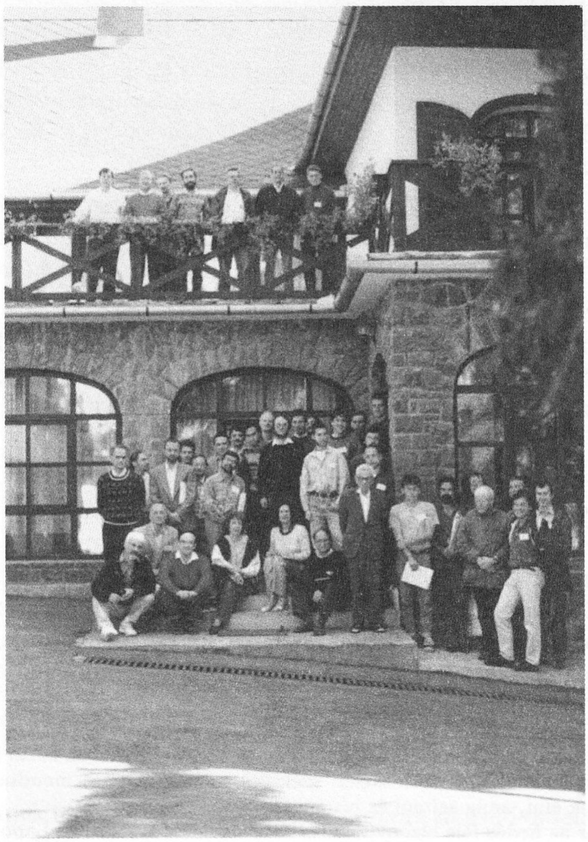
---

[3] Ez tiszta matematikában egy különlegesen nagy konferenciának számít.

[4] A kötetben megtalálható a számos szakmai áttekintő cikk mellett több megemlékezés régi barátai tollából.

Ebben a cikkben két emlékezetes konferenciáról szólunk részletesebben.

1995-ben egy nemzetközi tudományos műhelyt (workshop-ot) szerveztünk kevés résztvevővel, Mátraházán. A „workshop"-ok abban különböznek a szokványos konferenciáktól, hogy kevés előadás szerepel a programjukban, ezek között gyakran vannak áttekintő előadások, és nagyobb szerepet kapnak a résztvevők tudományos beszélgetései, „együtt-dolgozása". Mátraházán csak 9 előadás volt. Az ilyen kisebb konferenciákat, workshopokat Erdős különösen szerette: otthon érezte magát, régi barátok és fiatal matematikusok vették körül. Ilyenkor lehetett legjobban csodálni azt a különleges képességét, hogy szimultán dolgozott teljesen különböző problémákon, teljesen különböző emberekkel.



A mátraházi konferencia csoportképe

Ennek a workshopnak az volt a célja, hogy összehozza a szakembereket a kombinatorikus matematika egymástól távolabbi területeiről, pontosabban, a tiszta kombinatorika, a gráfelmélet, a kombinatorikus számelmélet és a véletlen gráfok elméletének témáiból.[5] Egy hetet töltöttünk ott „bizonyításokkal és sejtésekkel".[6] Emlékszünk, hogy Erdős intenzíven dolgozott például Peter Cameronnal egy kombinatorikus számelméleti kérdésen. Cikkük részben a szemünk láttára született, posthumous jelent meg a workshop kötetében [7].

Ezen a workshop-on amelyet a Magyar Tudományos Akadémia mátraházai üdülőjében rendeztünk, maga a helyszín is különleges légkört és hangulatot jelentett Erdős számára. Erdőst itt nagy szeretet, tisztelet, és törődés vette körül. A 60-as évek vége óta Erdős rendszeresen eltöltött itt 1–2 hetet. Különösen kellemes emlékűek voltak számára azok az időszakok, amikor még édesanyja és barátai, Kalmár László és felesége, Rényi Alfréd és felesége, Rényi Kató, Turán Pál társaságában lehetett itt. A fenti neveket nem kell olvasóinknak bemutatni, azt azonban talán kevesen tudják, hogy Kalmár László segített Erdősnek megírni az első cikkét, amely a Csebisev tétel egy új, egyszerűsített bizonyítását tartalmazta.[7] [8] Mátraházán született néhány korábbi, Erdős Pállal közös kedvenc cikkünk is, pl. [42], [43].

A mátraházi üdülőben az élethez hozzátartozott, hogy itt a legkülönbözőbb tudományok jeles képviselői voltak együtt, nemcsak matematikusok, akik természetesen nemcsak dolgoztak, hanem politizáltak, történelemről és közgazdaságtanról, biológiáról, fizikáról, orvostudományokról beszélgettek.

Ezekben a beszélgetésekben Erdős nagy érdeklődéssel és széleskörű tájékozottsággal vett részt. A beszélgetésekhez kiváló keretet adtak a hosszabb-rövidebb séták. Erdősnek voltak kedvenc sétaútjai. Az egyik egy kis kilátó toronyba vezetett, ahova mindig szívesen felmászott.

Emellett Erdős rengeteget pingpongozott itt sajátos, kissé furcsa, de igen hatékony stílusában[9], sakkozott, és go-zott (sokáig ő volt a legjobb magyar go játékos).[10] Bridzselni is szeretett.

4. Varsó, egy évvel később

Erdős Varsóban halt meg 1996. szeptember 20-án. Halálának körülményei mélyen megrendítőek voltak. A varsói Banach Központban 1996 őszén egy öthetes konferencia-sorozatot rendeztek. Erdős két hetet töltött ezen a workshop-sorozaton. Élvezte a matematikai légkört, de sokat panaszkodott a hideg időjárásra. Két előadást tartott, a másodikat szeptember 18-án, szerdán. Nagy sikere volt.

[5] Igen ismert matematikusok mellett azonban a tehetséges fiatal diákok közül is sokan itt voltak.

[6] Ez Erdős kedvenc kifejezése volt. Néha, szokásos túlzásaival, azt mondta, hogy addig van értelme az embernek élni, amig sejteni és bizonyítani tud.

[7] Később Kalmár az Erdős féle bizonyítást a Középiskolai Matematikai Lapokban dolgozta fel, [52].

[8] Csebisev tétele azt mondja ki, hogy bármely egész szám és a kétszeres között van prímszám.

[9] talán azért volt furcsa a stílusa, mert nem volt nagyon jó a szeme, de kitűnőek voltak a reflexei?

[10] Nagyon jó sakkozó volt, de a matematikusok között ez kevésbé meglepő. A GO egy kínai eredetű játék amelyik talán ugyanolyan komoly és mély, mint a sakk, csak Európában kevésbé elterjedt.

Erdős Go-zik (1941)

Péntek hajnali három körül, egy szívrohamot követően, a szállodai szobájából kórházba került. Hamarosan elvesztette eszméletét. Délután három óra körül egy második, végzetes szívrohamot kapott.

Barátai, kollégái, szerencsétlen körülmények folytán, csak ezután értesülhettek kórházbaviteléről és haláláról.

* * *

Erdős – akinek idősebb korára erősödött humora morbid oldala, – gyakran „kifejtette", hogy az „élet befejezésének legszebb módja" „... megtartani egy előadást, befejezni egy bizonyítást, letenni a krétát, és meghalni..." Bizonyos értelemben úgy ment el, ahogyan azt kívánta. A legutolsó napig matematikán gondolkozott, sejtett és bizonyított.

Bármerre járt a világban, a nap szinte minden percében törődő és szeretettel gondoskodó kollégák hada vette körül, és baráti, szerető gondoskodás, amelyet egyre kevésbé tudott nélkülözni – mégis utolsó óráiban magára maradt, az idegen kórházi környezetben, idegenek között.

Mindnyájunk érzéseit fejezte ki Vojta Rödl egy e-mailben:

„Pali bácsi nélkül már semmi sem lesz a régi".[11]

5. Erdős matematikájáról

Erdős még nincs 18 éves, amikor megold egy Kőnig Dénestől hallott gráfelméleti problémát. (Ezt Kőnig beveszi könyvébe, amely az első és évtizedekig az egyetlen gráfelméleti monográfia.) Fejér Lipótnál doktorál, témája számelmélet, prímszámok számtani sorokban való eloszlása.

Erdős 1934-ben Mordell meghívására 4 évre Manchesterbe megy. Eközben rendszeresen hazajár Budapestre: évente háromszor több hetet tölt itthon szüleivel és barátaival. 1938-ban az elsők között van, akik úgy ítélik meg, hogy el kell hagyni Magyarországot. Szeptemberben a Princeton-i Institute for Advanced Study meghívására az USA-ba megy és csak 10 év múlva, 1948-ban jön haza, hogy rajongva szeretett édesanyját és barátait meglátogassa. 1955-től már rendszeressé válnak hosszabb-rövidebb ideig tartó hazalátogatásai. 1962-től az MTA Matematikai Kutatóintézetének munkatársa. Emellett változatlanul járja a világot, az év jelentős részét külföldön tölti.

* * *

1939-ben kezdte a „nomád" életmódot: állandóan úton volt, egyik helyről a másikra utazott.

Azonban életformájának nem az volt a leglényegesebb vonása, hogy sok helyen járt. Ennél sokkal fontosabb az, hogy rendkívül könnyen volt képes „matematikai" és „emberi" kapcsolatot teremteni, barátságokat kötni, bármerre is járt. Amikor új helyre érkezett, az ottani matematikusokkal elkezdett beszélgetni, kikérdezte őket kutatási témájukról, elkezdett gondolkodni a kérdéseiken, és gyakran meglepő megoldásokkal állt elő. Ehhez hozzátartozik, hogy hihetetlenül gyors is volt.

Gyakran megesik, hogy a matematikailag nagyon erős, mély, és gyors gondolkodású matematikusokkal bénító együtt dolgozni. Nagyon nyomasztó tud lenni, amikor hónapokig gondolkodunk egy kérdésen, és egyszercsak találkozunk valakivel, aki feltesz néhány kérdést, és megoldja problémánkat. Erdőssel teljesen más volt a helyzet. Annak ellenére, hogy tisztában voltunk azzal, hogy egy matematikai óriás ül velünk szemben, a vele való beszélgetésekkor Erdős olyan különös légkört teremtett, hogy vele egyenrangúnak érezhettük magunkat. Gyakran tett fel a másik területéhez közel álló kérdéseket, vagy olyanokat, amelyeknél ő megakadt. Mindenki boldog volt, ha válaszolni tudott a kérdéseire, és büszke volt, ha sikerült megoldania egy „Erdős problémát",[12] majd elmondhatta neki a megoldást. De ő nem állt

[11] "Things won't be the same without uncle Paul".

[12] azaz, Erdőst foglalkoztató matematikai kérdést.

meg itt, hanem további kapcsolódó kérdéseket tett fel, az eredetileg ártatlannak látszó kérdésből kiinduló újabb és újabb irányokba kutatva tovább.

Mindannyiunknak vannak erről történetei. Hadd mutassuk ezt be Hajnal András történetén keresztül. (Hajnal ezt a történetet részletesen leírja Erdős Kombinatorikus Halmazelméleti hatását taglaló egyik áttekintő cikkében [49], mi itt magyarra fordítottuk és kissé lerövidítettük.)[13] Erdős Kalmárnál volt látogatóban, amikor Hajnal először találkozott vele. Hajnal ezt írja:

> „Abban az időben Kalmár László aspiránsa voltam Szegeden ... Erdős lejött Szegedre meglátogatni az egyetemet. ... Engem úgy mutattak be neki, mint egy ígéretes fiatalembert, aki halmazelméletet tanul. [Hajnal axiomatikus halmazelmélettel foglalkozott ekkortájt, disszertációját a relatív konstruálhatóságból írta.] Hamarosan magunkra hagytak bennünket Kalmár egyetemi szobájában, két hatalmas fotelben ülve, közöttünk egy kávézó asztallal. Úgy éreztem, nagyon öreg: 43 éves volt, én 25. Nagyon megtisztelve éreztem magamat és zavarban is voltam, hogy egyedül hagytak ezzel a híres emberrel. Akkor még nem tudtam, hogy legtöbb fiatal munkatársával hasonló körülmények között találkozott. Erdős megkérdezte, mi érdekel engem halmazelméleten belül. Én a relatív konstruálhatóság témájában dolgoztam, és nagyon büszke is voltam erre. Elkezdtem tehát elmagyarázni az eredményeimet. Ő nagyon udvariasan végighallgatott, majd, amikor befejeztem, megkérdezte: „érdekli önt a normális halmazelmélet is?..."

Itt Hajnal leírja a beszélgetésük matematikai témáját, amit átugrunk. Mindenesetre, Hajnal feltett Erdősnek egy kérdést a sokváltozós halmaz-leképezésekkel kapcsolatban. Hajnal így folytatja:

> „Szerencsére ez tetszett Erdősnek. Élénk beszélgetésbe kezdtünk, ami egyre folyékonyabb és közvetlenebb lett. Az első dolog, amit tőle tanultam, (és ez elég sok időbe tellett nekem) az volt, hogy ő soha sem kezdte az általános esettel. Először azt akarta kideríteni, mi történik a kétváltozós esetben.

Később Erdős szelíden rábeszélte Hajnalt, hogy (Fodor Gézával) másszanak fel a szegedi Dóm tornyába.

> „Addigra már két évet töltöttem el Szegeden, de soha nem okozott nehézséget, hogy ellenálljak bármiféle nyomásnak, hogy felmásszak a toronyba. Nagy meglepetésemre, Erdős indítványának nem tudtam ellenállni. A lépcsőkön felfelé haladva Erdős újabb és újabb eredményeket és sejtéseket fogalmazott meg, miközben néha arra panaszkodott, hogy kicsit szédül.

[13] A téma, pontosabban Erdős és a halmazelmélet kapcsolata iránt érdeklődők számára a már említett, a Matematikai Lapokban megjelent Hajnal cikket is ajánlhatunk [48].

Este Kalmáréknál vacsoráztunk, ahol a matematikai disszkusszió a halmazfüggvényekről továbbfolytatódott, néha keveredve Erdős Sam-re és Joe-ra (azaz, az USA-ra és Szovjetúnióra) vonatkozó megjegyzéseivel. Amikor elváltunk, az már majdnem olyan volt, mintha régi barátok váltak volna el, és volt egy félig kész közös cikkünk, amelyet már levelezés útján is befejezhettünk."

6. Ars Mathematica: „Sejtés és Bizonyítás"...

Erdős matematikájáról úgy tudhatjuk meg a legtöbbet, ha eredetiben olvassuk el néhány cikkét. Ezeknek egy része – elsősorban a kombinatorika, de a számelmélet és a geometria területéről is – van összegyűjtve az 1973-ban az MIT Press által kiadott „Art of Counting" (azaz, „A számolás művészete") című kötetben [15]. A könyv egy kitűnő válogatás Erdős cikkeiből.

Az olvasó számára talán a már említett, több mint 30, a Matematikai Lapokban megjelent cikke a legelérhetőbb forrás. Ezekre mi előszeretettel fogunk hivatkozni.

Több áttekintő tanulmány jelent meg munkásságáról a 80-adik születésnapja alkalmából, illetve halála óta. Csak néhányat említve: Bollobás [5], Hajnal [49], Ruzsa [61], Sárközy [62] és Simonovits [63]. Ezenkívül melegen ajánljuk Turán már említett írását [71] és Erdős egy saját cikkét [30], valamint egy életéről szóló hosszú cikket Babaitól [2], és egyet T. Sóstól [66]. Sokat árul el Erdős matematikájáról még Chung és Graham könyve Erdős megoldatlan gráfelméleti sejtéseiről, problémáiról is [6].

Végül sokat megtudhatunk Erdős matematikájáról és személyiségéről azokból a cikkekből, amelyeket *ő maga* írt barátairól: Turánról [19], [18], [20], [18], Gallairól, [23], Kalmárról [16], Gödelről [27], Gabriel Diracról [21], Ernst Strausról [24], Stan Ulamról [25], Richard Radoról [26].

* * *

Már említettük, hogy amikor Erdős 50 éves lett, Turán írt egy áttekintést [71] Erdős matematikai munkásságáról. Turán sorai még ma is azok közé az írások közé tartoznak, amelyek a legjobban segítenek Erdős matematikájának megértésében.[14] Cikke „bevezető" részében Turán a következőképpen ír:

> „Nem könnyű annak a feladata, aki Erdős Pál matematikai munkáinak akár csak vázlatos ismertetésére vállalkozik azon alkalomból, hogy 1963 március 26-án lesz 50 éves. ... Nehézzé teszi először az is, hogy ... tudományos dolgozatainak száma közel 400,... tehát egy mozartinak nevezhető termékenység és e cikk szükségképpen korlátozott terjedelme.

[14]Nem meglepő, hogy amikor Erdősről írunk, sokan használjuk Turán sorait. Az viszont érdekesebb, hogy maga Erdős is ezt a forrást használta egyik utolsó cikkében [30].

Még nehezebbé teszi az, hogy a dolgozatok témaköre a matematika oly távoleső területeit foglalja magában, melyre Erdősön kívül nehezen találni bennük egyenlően kompetens szakértőt."

...

„De főleg nehézzé tette az írást az, hogy munkáinak és hatásának ismertetése nehezen választható el matematikusi egyéniségétől."

...

„Bizonyos értelemben egy occidentális [nyugati] Ramanujan ő, annak erejével és korlátaival, szinguláris és egyszeri jelenség...

Eddig publikált munkái nagyjából a következő témakörökre vonatkoznak:

1. Aritmetika [Számelmélet]
2. Valószínűségszámítás, ergodelmélet,
3. Gráfelmélet, aszimptotikus kombinatorika
4. Konstruktív függvénytan,
5. Halmazelmélet, halmazelméleti topológia,
6. Sorelmélet
7. Komplex függvénytan,
8. Geometria.

..."

Ezek a sorok több, mint 30 éve íródtak. Addigra Erdős körülbelül 400 cikket írt (ma a publikációs listája körülbelül 1500 cikket tartalmaz).

* * *

Úgy tűnik, hogy elmúltak azok az idők, amikor a matematikusok képesek voltak több különböző témát mélyen megérteni, és ezekben maradandót alkotni. Valaki egyszer azt mondta, Hilbert volt az utolsó polihisztor. Az bizonyos, hogy Erdős úttörő volt több, egymástól független területen, és a mai matematika számos ágának nyilvánvalóan ő volt az egyik megteremtője. Arra is több példa van, hogy valaki más – egy adott területen – írt egy vagy két úttörő cikket, aztán Erdős elkezdett kérdezni, tételeket sejteni és bizonyítani, és a terület néhány elszigetelt eredmény gyűjteményéből virágzó elméletté változott. Sokszor munkatársaiban sem tudatosodott azonnal, hogy mi is történik: Erdős kérdései és válaszai csak egy kis terület utolsó hiányosságait pótolták, vagy pedig egy jelentős elmélet van kialakulóban.

Erdős matematikájának leírásában két szempontot fogunk követni:

Megemlítjük néhány fontosabb eredményét. Bemutatjuk, hogyan nőttek ki elméletek Erdős „kis" kérdéseiből. Ezek között voltak, ahol Erdős fejlesztette ki az elméletet, máshol mások folytatták az Erdős által elkezdett kutatásokat.

Nem próbáljuk ezeket szétválasztani, mert Erdősnél is minden mindennel összefonódott.

Erdős matematikai munkásságának első két évtizedében elsősorban számelmélettel és analízissel foglalkozott. Ma úgy tűnhet, hogy legtöbbet kombinatorikai, diszkrét matematikai témákon dolgozott: gráfelméleten, kombinatorikus számelméleten, kombinatorikus halmazelméleten. Valójában, a korábbi munkáiban is sokszor megtalálható a kombinatorikus jelleg. Ugyanakkor a legtöbb a 13. oldalon 1–8. alatt felsorolt téma is az élete végéig megjelenik munkásságában.

Néhány éve megkértük, hogy írjon egy cikket „kedvenc tételeiről" [30], a szokásos „kedvenc problémáiról" helyett, abba a kötetbe, amit a 80-adik születésnapjára adtunk ki [74]. Ez a cikk, amelyben leírja a saját értékelését, segít kiválasztani néhányat a legfontosabb eredményei közül. Most ezek közül említünk néhányat.

* * *

Erdős elemi bizonyítást talált sok klasszikus prímszámelméleti tételre. A prímszámok számára Gauss sejtette, hogy ez n-ig kb. $\frac{n}{\log n}$, de ezt csak sokkal később sikerült bizonyítani a Riemann féle $\zeta(s) := \sum \frac{1}{n^s}$ függvény mély analitikus tulajdonságainak felhasználásával. 1948-ban Erdős és Selberg egy rég várt elemi bizonyítást találtak a prímszámtételre. Itt az „elemi" azt jelenti, hogy nem használ komplex függvénytant. Az eredménytől egyébként akkor azt várták, hogy áttörést fog eredményezni a számelmélet és a Riemann sejtésre vonatkozó kutatások terén, de ez – úgy tűnik – nem következett be. A történetet és az Erdős–Selberg bizonyítás egy részletesen kidolgozott variánsát megtalálhatjuk a Hoffmann–Surányi cikkben [50].

* * *

Erdős megfigyelte, hogy néhány számelméleti függvény viselkedése nagyon hasonlít a független valószínűségi változók összegének viselkedéséhez: Kaccal [36] és Wintnerrel [46] a számelmélet egy teljesen új ágát indították el. Az elmélet lényegét dióhéjban úgy lehet leírni, hogy ha bizonyos számelméleti függvényeket vizsgálunk, azok viselkedése sok szempontból olyan, mintha a prímek egymástól független véletlen számok lennének. Például, egy szám prímosztóinak száma normális eloszlású.

* * *

Régóta vizsgált, hogyan lehet minél pontosabban megadni az $x^2+y^2 \le T$ egész megoldásainak számát. Mivel ez nem más, mint az origó középpontú, $\sqrt{T}$ sugarú körben levő rácspontok száma, ez nagy T-re a kör területéhez van közel: $\pi T + o(T)$. A kérdés az, hogy lehet-e jelentősen javítani a fenti becslést. Hardy és Littlewood megmutatták, hogy ha $f(T)$ jelöli a tekintett rácspontok számát, akkor

$$\frac{|f(T) - \pi T|}{(T \log T)^{1/4}}$$

nem tarthat 0-hoz, azaz (alkalmas $c > 0$ konstansra) van tetszőleges nagy T, amire a hibatag nagyobb, mint $c(T \log T)^{1/4}$.

Erdős és Fuchs [34] észrevették, hogy a négyzetszámok helyett hasonló jelenség igaz egészek tetszőleges sorozatára. A fentihez kapcsolódóan belátták, hogy

Erdős–Fuchs tétel. *Bármely $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatra, ha $F(T)$ az $a_i + a_j \leq T$ megoldásainak száma, akkor bármely $c > 0$-ra*

$$\frac{|F(T) - cT|}{\left(T/(\log T)^2\right)^{1/4}}$$

nem tarthat 0-hoz.

Ez azt jelenti, hogy az $a_i + a_j \leq T$ megoldásszáma nem lehet túl közel egy lineáris függvényhez. (Ennek az a tartalma, hogy az $a_i + a_j = n$ megoldásszáma nemcsak, hogy nem lehet konstans, de még átlagban sem lehet túl közel egy konstanshoz.)

* * *

Erdős olyan matematikus volt, akit elsősorban a „konkrét kérdések" érdekeltek.

Erdős barátja és szerzőtársa, Ernst Straus (aki egy ideig Albert Einstennek asszisztense és szerzőtársa is volt) így írt róla: „A problémamegoldók hercege és a kérdésfelvetők császára." Erdős ezt a következőképpen fogalmazza:

> „A kérdések mindig is matematikai életem lényeges részét alkották. Egy jól kiválasztott kérdés a matematika egy adott területének alapvető nehézségét különítheti el, és így olyan szintjelzőként szolgálhat, amihez viszonyítani lehet a területen elért haladást. Egy ártatlannak tűnő kérdésen gyakran nem is látszik valódi természete...".

Sok matematikus inkább elméletek felépítését tekinti feladatának, és amikor megakad, akkor megvizsgál speciális eseteket, hogy a részleteket tisztázza.

Erdős az ellenkező módszerrel dolgozott. Speciális esetekből indult ki, megtámadta őket, egyre több eredményt bizonyított az egyes kérdések körül, kezdetben csak kis magvát építve ki annak, ami később egy teljes elméletté nőtte ki magát.[15] Az alábbiakban ezt mutatjuk be néhány példán.

Érdekes illusztrációja Erdős matematizálási stílusának a híres Erdős–Szekeres problémakör kifejlődése is. Erdős és Szekeres [45] egy Klein Eszter által feltett szokatlan kérdésből indultak ki:

Adott n általános helyzetű pont a síkon, milyen nagy konvex k-szög választható ki ebből a ponthalmazból? Könnyű belátni, hogy 5 pont közül mindig kiválasztható 4 konvex helyzetű. Azt már sokkal nehezebb bizonyítani, hogy 9 pont közül kiválasztható 5 konvex helyzetű. Erdős és Szekeres bebizonyított egy általános tételt

[15] Ez derült ki a Hajnal András által leírt első találkozásukból is, 11. old.

[45]. Eközben tulajdonképpen újra felfedezték Ramsey tételét [59] amely segített az eredeti kérdés megoldásában. Ramsey más motivációval indult és kevéssel megelőzte őket a tételt bizonyításával.[16]

Maga a geometriai tétel a következőt mondja ki:

Erdős–Szekeres tétel (1936). *Minden $k \geq 3$ egészhez van olyan $f(k)$ szám, hogy ha a síkon legalább $f(k)$ pontot veszünk, akkor ezek között lesz k olyan, amelyek egy konvex k-szöget határoznak meg.*

Erdős és Szekeres azt sejtették, hogy $f(k)$ lehető legkisebb értéke $2^{k-2}+1$.[17] Ez máig is megoldatlan.

Ramsey tétele a legegyszerűbb általános esetben, Erdős és Szekeres megfogalmazásában így szól:

Erdős és Szekeres „Ramsey" tétele ([45]). *Legyen adott két pozitív egész, k és ℓ. Ha egy G gráf pontszáma*

$$n > \binom{k+\ell-2}{k-1}, \tag{1}$$

akkor G vagy tartalmaz egy teljes k-ast, vagy egy üres ℓ-est.

A tétel felfogható a skatulya-elv általánosításának is, ez magyarázza, hogy nagyon sok helyen alkalmazható, gráfelméletben, számelméletben, elméleti számítógéptudományban, és még sok más területen.

De ha a tétel nem volna alkalmazható, akkor is elmondanánk róla, hogy sok és mély általánosítása van, és hogy ma a kombinatorikában van külön elmélete a véges és végtelen Ramsey típusú kérdéseknek, és mindenképpen ezek a modern kombinatorika egyik legmélyebb, legkiterjedtebb területét jelentik.[18]

* * *

A Ramsey tétellel elérkeztünk a kombinatorikához.

A kombinatorika a számítógéptudománnyal való kölcsönhatása következtében robbanásszerű fejlődésen ment át az elmúlt két-három évtizedben. Bár Erdős maga sohasem foglalkozott közvetlenül számítógéptudománnyal, Erdős matematikájának hatása nagyon erősen érződik a kombinatorikában és az ezzel szoros kapcsolatban levő számítógéptudományban. Például „véletlen módszere" az elméleti számítógéptudomány hatékony eszközévé vált, többek között algoritmusok sebességének alsó becslésénél használják.

---

[16] A történet részletes leírása megtalálható például Szekeres cikkében [67] az Art of Counting [15] bevezető részében.

[17] Az Erdős féle geometriai problémák iránt érdeklődőknek ajánljuk a Pach–Agarwal könyvet [56].

[18] Standard könyv a témakörből Graham, Rothschild és Spencer monográfiája [47]

Erdős kedvenc kombinatorikai területei közé tartoztak a Ramsey elmélet, az extremális gráfok elmélete, és a véletlen gráfok elmélete is. (Ez a három elmélet egymással is összefonódott.) Mi itt – illusztrációként – a véletlen gráfokkal fogunk foglalkozni. Miért éppen ezzel? „A valószínűségszámítási módszerek alkalmazása vörös fonalként húzódik végig Erdős egész munkásságán..." írja Turán a már többször idézett cikkében. Ez a véletlen gráfoknál is nagyon jól érzékelhető.

Ennek a területnek egyre nő a jelentősége. A véletlen módszerek számelméletben, gráfelméletben, és sok más területen való tudatos alkalmazása Erdős egyik legnagyobb érdeme.

A véletlen struktúrákra vonatkozó eredményeket három csoportba érdemes osztanunk:

(1) Vannak eredmények, amelyek arról szólnak, hogy bizonyos determinisztikus struktúrák véletlenszerű vonásokat mutatnak. (Ilyenek a már említett, a prímszámokra vonatkozó tételek, az Erdős–Kac tétel, stb.)

(2) Más eredmények véletlen módszerekkel bizonyítják bizonyos objektumok létezését.

(3) Végül az utolsó csoportba tartoznak azok az eredmények, ahol adott típusú objektumokat generálunk véletlenszerűen, de nem azért, hogy valaminek a létezését bizonyítsuk, hanem, hogy ezek tipikus struktúráját írjuk le.

A fenti osztályozás fontos Erdős matematikájában, az annak nyomán kialakult területeken és a vele párhuzamosan mások által kifejlesztett elméletekben is.

* * *

Turánnak egy Ramsey-típusú kérdésére válaszolva Erdős véletlen módszereket kezdett alkalmazni a gráfelméletben. Mi is volt ez a kérdés?

Az Erdős–Szekeres képletből azonnal látjuk, hogy minden n pontú gráf tartalmaz egy legalább $\frac{1}{2}\log_2 n$ méretű teljest vagy üreset. Erdőst bebizonyította, hogy

Erdős tétel [10]. *Van olyan G_n n-pontú gráf, melyben a legnagyobb teljes és a legnagyobb üres részgráf is legfeljebb $2\log_2 n$ méretű.*

A cikk egyszerű leszámolást használva bizonyítja ilyen gráfok létezését, anélkül, hogy egyetlen konkrét ilyen gráfot is megadna. Valójában azt mutatja meg, hogy *majdnem mindegyik gráf* ilyen.

Mindmáig izgalmas nyitott kérdés egy ilyen gráf megkonstruálása.

Bizonyos értelemben ekkor született meg a véletlen módszer. Később ennek a módszernek egyre kifinomultabb változatait használva Erdős bebizonyította a nagy derékbőségű[19] és nagy kromatikus számmal rendelkező gráfok létezését [12], [13].

Erdős tétel. *Minden k és g egész számra van olyan G gráf, amelyiknek nincs g-nél rövidebb köre, de a kromatikus száma nagyobb, mint k.*

[19] A derékbőség a gráf legrövidebb körének hossza. Az angol „girth" szót szoktuk itt használni. Egy gráf kromatikus száma az a legkisebb egész, hogy ennyi színnel úgy is meg lehet színezni a gráf pontjait, hogy minden él 2 különböző színű pontot kössön össze.

Az ilyen gráfok létezése azért meglepő, mert a nagy derékbőség azt jelenti, hogy a gráf ritka, kevés éle van, és addig a magas kromatikus számot sűrű részekkel vélték biztosíthatónak. A bizonyítási módszer meglehetősen bonyolult, de egy igen egyszerű és fontos új gondolatot tartalmaz:

> Nem azt mutatjuk meg, hogy valamilyen megadott pontszámú és élszámú gráfok között majdnem mindegyik magas kromatikus számú és derékbőségű, hanem azt, hogy majdnem mindegyikből elhagyható néhány él, hogy azután már ilyenné váljék.

Az előbbi Erdős féle egzisztenciabizonyítás determinisztikussá tétele volt Lovász egyik első kiemelkedő eredménye [55]. Azzal, hogy a magát a tételt *általánosította hipergráfokra,* egy messze nem triviális indukciós bizonyítást tudott adni rá.

A „véletlen módszeres egzisztenciabizonyításoknak" számtalan alkalmazása van gráfelmélet legkülönbözőbb területein. Kapcsolódik a kérdés az extremális gráfok elméletéhez is, amiről itt most nem írunk (bár Erdősnek döntő hatása volt ennek kifejlődésében, és bár mindkét szerző kedvenc kutatási területei közé tartozik). És kapcsolódik a kérdés az expander gráfok modern elméletéhez is.[20]

A véletlen módszeres egzisztenciabizonyítások egyik csúcspontja az Erdős–Lovász cikkben megjelent a Lovász szita (Lovász Local Lemma) [35]. Ezt a lemmát algoritmusokban is gyakran használják.

* * *

Erdős és Rényi a 60-as években megfogalmazták a véletlen gráfok bizonyos modelljeit (ezeknek már voltak előzményei, pl. Gilbertnél) és több a véletlen gráfok tipikus struktúrájára vonatkozó tételt bizonyítottak be, [38], [39], [40], [41], a következő kérdésre keresve a választ:

> Mi az, hogy véletlen gráf, és tipikusan milyen tulajdonságai vannak?

A kérdés csírájában már ott volt a fentebb megfogalmazott egzisztenciabizonyításokban is.

Ma a véletlen gráfok elmélete is az egyik legjelentősebb ága a kombinatorikának. Az alábbiakban néhány idevonatkozó tételt mutatunk be, leegyszerűsítve és a definíciókat elhagyva.

Abban a véletlen gráfmodellben, amelyet Erdős, majd később Erdős és Rényi használtak, [41] egy $f(n)$ pozitív egész értékű függvényhez tekintjük az összes, az adott $x_1, \dots, x_n$ csúcsokon megadható $f(n)$ élű gráfot. Ezek száma

$$M(n) := \binom{\binom{n}{2}}{f(n)}$$

[20] Az expander gráfok fontos szerepet játszanak az alkalmazásokban, pl. a biztonságos információ-továbbításban.

Ezek közül kiválasztunk egyet, $1/M(n)$ valószínűséggel.

Egy másik nagyon elterjedt véletlen gráfmodellben, egy $p(n) > 0$ pozitív értékű függvényhez, az adott $x_1, \ldots, x_n$ csúcsokon az $\binom{n}{2}$ pontpárra mindegyikére kisorsoljuk, hogy kiválasszuk-e az adott $x_i x_j$ élt, vagy sem. A kiválasztás valószínűsége $p(n)$ és az élválasztások egymástól független események.

A következő tétel szerint a legtöbb gráfnak nincs szimmetriája.

Tétel (Erdős–Rényi, Aszimmetrikus gráfok). *Ha az $x_1, \ldots, x_n$ pontokon megadunk egy véletlen gráfot, $p > 0$ konstans élvalószínűséggel, akkor annak valószínűsége, hogy a pontoknak legyen olyan permutációja, amely a gráfot önmagába viszi elenyésző: 0-hoz tart, ha $n \to \infty$.*

Az alábbi tétel (megint nagyon leegyszerűsítve) azt mondja ki, hogy az n pontra éleket dobálva le egymás után, véletlenszerűen a gráf abban a pillanatban válik összefüggővé, amikor élszáma eléri az $\frac{1}{2}n\log n$-et.

Tétel (Erdős–Rényi, Összefüggőség). *Ha $c > 1$ és az $x_1, \ldots, x_n$ pontokon megadunk egy véletlen gráfot, $p > c\frac{\log n}{n}$ élvalószínűséggel, akkor a kapott gráf* összefüggő, *1-hez tartó valószínűséggel, ha $n \to \infty$. Ha viszont $c < 1$, akkor ezen véletlen gráf* nem összefüggő, *1-hez tartó valószínűséggel.*

Rényi Alfréd halála után[21] nem volt világos, hogy milyen irányban fog fejlődni a véletlen gráfok elmélete. Mindenesetre volt néhány olyan probléma, melyek megoldása nagyon izgalmasnak látszott. Az egyik a véletlen gráfok kromatikus számára vonatkozott, a másik a véletlen gráfok Hamilton körére. A kromatikus számra vonatkozó tételt Bollobás Béla bizonyította be, egy bizonyos Spencer és Shamír által bizonyított eredményt is felhasználva [4]. Kicsit leegyszerűsítve a tétel így fogalmazható:

Véletlen gráfok komatikus száma. *Majdnem minden n pontú gráf kromatikus száma aszimptotikusan $\frac{n}{2\log_2 n}$.*

A másik, talán (?) leghíresebb nyitott kérdés arra vonatkozott, hogy egy véletlen gráfban milyen élszámnál jelenik meg a Hamilton kör. Erre vonatkozik

Pósa tétele [58]. *Létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy ha egy életlen gráfnak $cn\log n$ éle van, akkor 1-hez tartó valószínűséggel van benne Hamilton kör.*

Nem folytatjuk ezen nagyon vonzó és dinamikusan fejlődő terület ismertetését. Az érdeklődő olvasó tájékozódhat Erdős vagy Erdős és Rényi eredeti cikkeiből, vagy Erdős és Spencer [44], Bollobás [3], Alon és Spencer [1] monográfiáiból.

* * *

Erdősnek jelentős és szép valószínűségszámítási eredményei is vannak, amelyek talán kevésbé közismertek, de ezekről itt nem szólunk részletesen. Eredményei

---

[21] 1970-ben

között vannak bolyongási tételek, a 0–1 sorozatokra vonatkozó tételek. Ehhez társulnak a véletlen módszerek alkalmazásai a tiszta matematika más területein.

* * *

Erdős stílusának egyik alapvető vonása volt, hogy meglepő kérdéseket tett fel, amelyek a matematika távoli területeit kötötték össze.

Munkásságában összekapcsolódott a számelmélet, a kombinatorika/gráfelmélet és a geometria. A gráfelmélet és geometria összekapcsolására szép példa a következő. Több, mint ötven éve Erdős a következőt kérdezte [11]:

„Legfeljebb hány egységnyi távolság lehet n síkbeli pont között?"

Azt sejtette, hogy legfeljebb $O\left(n^{1+o(1)}\right)$[22]. Ez a sejtés azon alapul, hogy található olyan élhosszúságú rács, melyben az egységtávolságok száma egy $c\sqrt{n}$ sugarú körlemezben kicsit több, mint lineáris. A sejtés szerint ez az optimum.

A kérdés geometriainak tűnhet, de nyilvánvalóan nem hasonlít a szokásos geometriai kérdésekre.

Könnyen összekapcsolható ez azzal a klasszikus számelméleti kérdéssel, hogy adott $m > 0$ egész számot hányféleképpen lehet felírni $x^2 + y^2$ alakban, ahol x és y egészek, amiről már írtunk (l. 14. old.).

A sejtést könnyű megérteni, de bizonyítás még nem született rá. Erdős rögtön észrevette, hogy egy egyszerű, (a $K_{2,3}$-a vonatkozó) extremális gráf tétel az $O(n^{3/2})$ becslést adja. Józsa és Szemerédi egy sokkal bonyolultabb okoskodása [51] a $o(n^{3/2})$ felső becslést eredményezi. Sok évvel később Spencer, Szemerédi és Trotter [65] bebizonyították, hogy az egységtávolságok száma $O(n^{4/3})$-nal becsülhető felülről, és Peter Brass megmutatta, hogy bizonyos Minkowski geometriákban ez éles lehet.[23] Az utóbbi eredmény jelentősége az, hogy ezek szerint – ha igaz a sejtés – a sík Euklideszi szerkezetét nem triviális módon kell kihasználni. Úgy tűnik, hogy a fenti sejtés a kombinatorikus geometria egyik legnehezebb kérdése.

Az elmúlt 50 évben a távolságok eloszlása (általános metrikus terekben is) nehéz és sokat kutatott területté vált. Meglepő módon az ilyen típusú kérdések a számítógéptudományban is fontossá váltak. Egyebek között a robotok mozgására vonatkozó matematikai kutatások vezetnek gyakran Erdős típusú kérdésekre.

* * *

Erdős matematikájáról szólva mindenképpen meg kell említeni Erdős és Turán egy sejtését, amely Van der Waerdennek a számtani sorozatokról szóló nagyon híres tételével kapcsolatos. A tétel azt mondja ki, hogy

Van der Waerden tétele. *Ha rögzítünk két tetszőleges pozitív egészt, k-t és r-et, és az egész számokat beosztjuk r osztályba, akkor legalább az egyik osztályban lesz k olyan szám, amelyek számtani sort alkotnak.*

[22] azaz, minden $\varepsilon > 0$-ra legfeljebb $n^{1+\varepsilon}$, feltéve, hogy $n > n_0(\varepsilon)$.

[23] Egy Minkowski geometria azzal jellemezhető, hogy megadunk egy centrálszimmetrikus konvex síkidomot és azt követeljük meg, hogy ez legyen a geometriában az egységkörlemez.

A negyvenes évek elején Erdős és Turán – Van der Waerden tételének kapcsán, – a következő kérdést tette fel: mi a maximális hossza az olyan $[1, n]$-beli egész számokból álló sorozatoknak, amelyek nem tartalmaznak k-tagú számtani sorozatot? Sejtésük az volt, hogy ez a maximum $o(n)$.[24] K. F. Roth 1954-ben bebizonyította ezt $k = 3$-ra, és 1973-ban E. Szemerédi bebizonyította az általános esetet [68] (amiért egy 1000$-os díjat kapott Erdőstől). H. Fürstenberg és I. Katznelson ennek az eredménynek többféle általánosítását bizonyították be az ergodelmélet eszközeit használva. Az utolsó évtizedben egy egészen új terület alakult ki ebből az ártatlannak tűnő kérdésből. Itt kell megjegyeznünk, hogy Tim Gowersnek aki 1998-ban Fields Érmet kapott, legkiemelkedőbb eredményei között vannak a Szemerédi tétel bizonyos élesítései. Ezen eredményei bizonyításában használja a Freiman–Ruzsa tételt (az additív számelmélet egyik alapvető tételét) és Ruzsa bizonyítási módszereit [60].

Egy érdekes idekapcsolódó Erdős probléma a következő: Igaz-e, hogy ha egész számok egy sorozatára $\sum_i \frac{1}{a_i} = \infty$, akkor minden k-ra van az a_i-kból álló k tagú számtani sor. Ha ez igaz volna, a Szemerédi tétel egy élesítése lenne. Mivel a prímszámok reciprokösszege divergens, ebből az is következne, hogy van minden k-ra csupa prímből álló számtani sor. Ez Erdős egyik kedvenc és mindmáig megoldatlan problémája.

Magáról a Van der Waerden és Ramsey témakörről is írt egy cikket Erdős a Matematikai Lapokban [14].

7. Erdős életvitele

Három érték állt Erdős életvitelének középpontjában: a függetlenség, az igazság keresése és a törődő emberszeretet.

A tudomány, a politika és a mindennapi élet igazságainak keresése volt örökös munkájának és termékenységének a hajtóereje, alárendelve ennek fájdalmat, betegséget, öregséget. Hogy biztosítsa személyes függetlenségét (a politikai hatalomtól, ideológiai dogmáktól, és az őt körülvevő világ szokásaitól), feladott családot, biztos munkahelyet, tulajdont. Ezt nem lehetett áldozatok nélkül megtenni, amint azt maga is sokszor megjegyezte. Egész életében vállalta ennek következményeit. Utolsó napjaiig folytatta nomád életmódját, miközben évente 20–30 cikket írt, és több tucat előadást tartott.

Ellentétben sokak véleményével, nem volt aszkéta, mégha a tulajdont nem is tartotta sokra. Ellenkezőleg, nagyon is élvezte az életet. Zene, olvasás, kirándulás stb. mind lényeges részei voltak életének. Időnként valamelyikünk szobájába belépve kezébe vett egy könyvet, kicsit beleolvasott, majd kölcsönkérte azt, és a világ egy másik pontjáról küldte vissza postán. Amint már korábban írtuk, meglepően

[24] Magyarul, ha pl. $k = 100$, és $\varepsilon > 0$ tetszőleges kis pozitív szám, és 1 és n között kiválasztunk több mint εn egész számot, akkor mindig találunk közöttük egy 100 hosszúságú számtani sort, feltéve, hogy n (ε-tól függően) elég nagy.

Erdős kiránduláson

jártas volt az irodalomban, a biológiában, a történelemben és a politikában. Szerette a zenét, különösen Bachot, Händelt és Mozartot. Ha valamelyikünkkel együtt dolgozott, gyakran kérte, hogy tegyük fel egyik kedvenc lemezét.

Szeretett étterembe járni, és gurmandhoz illő ízlése volt (a gurmand étvágya nélkül). Szeretett embereket étterembe hívni, és szerette, ha jó hangulatú vendégségekbe, vagy finom vacsorákra hívták. Szeretett jó szállodákban lakni. Ugyanakkor Indiában nem volt hajlandó rendes ételt enni, és jó éttermekbe menni. Pedig nem volt pénzszűkében. Úgy gondolta, hogy egy olyan országban, ahol több százmillió ember éhezik, nem ehet úgy, mint egy gurmand. Amikor a bombayi Tata Intézetben csodagyerekekről tartott előadást, megjegyezte nagyrészt jómódúakból álló közönségének, hogy nem érti, hogyan fogadhatja el az ember a jólétet ilyen mindenütt jelenlévő szegénység közepette.

* * *

Erdős törődött az emberekkel. Megértő és együttérző ember volt. Megrendítette, ha valamelyik barátja nehéz helyzetbe került. Erdős sokféleképpen segített másoknak. Segített matematizálásban, fiatalok pályájának egyengetésében, sokszor anyagi segítséget is nyújtott. Miután édesanyja meghalt, érzelmi okokból nem használta többé budapesti lakását, inkább az Akadémia vendégházában lakott. Lakását így éveken keresztül barátainak adta kölcsön: azoknak a magyaroknak, akik éppen költözködtek, vagy Magyarországra látogató külföldi barátainak.

* * *

A barátság nagyon fontos szerepet töltött be Erdős életében. 1930-ban, amikor egyetemi hallgató lett, megismerkedett Gallai Tiborral, Grünwald Gézával, Klein Eszterrel, Turán Pállal, Vázsonyi Endrével és másokkal a Pázmány Péter Tudományegyetemről,[25] valamint Szekeres Györggyel, aki vegyészmérnök hallgató volt a Műszaki Egyetemen, és a két egyetem között ingázott.

Gallai Tibor, Erdős, Wachsberger Márta az Anonymus-szobornál

[25] a mai Eötvös Loránd Tudományegyetem

A visszaemlékezéseik szerint rendszeres találkozóik, egész napos kirándulásaik Budapest környékén vagy a Városligeti Anonymus szobornál való matematizálásuk minden szempontból nagy hatással voltak a jövőjükre.

Egyfajta nyitott, „peripatetikus" egyetem volt ez. A kor szociálisan és politikailag kirekesztő magatartása, – ami mindnyájukat érintette, – hozta létre.

Szekeres György így írt ezekről az évekről:

> „Egy fiatal matematikusokból álló nagyon szoros kör volt a mienk, a legkiválóbbak közülük Erdős, Turán és Gallai voltak. Az itt kovácsolódott barátságok a legtartósabbak voltak azok közül, amiket valaha is láttam, túlélték a harmincas évek felfordulását, egy szörnyű világháborút, és azt, hogy szétszóródtunk a világ minden tájára. Főként matematikáról, személyes pletykákról, és politikáról beszéltünk."

Klein Eszter, Szekeres felesége, pedig így írt a híres Anonymus szobor körüli matematizálásukról:[26]

> „1929 (?) őszén mi elsőéves egyetemi hallgatók voltunk. Az analízis tanszéken Fejér Lipót adott elő, a gyakorlatokat Veress Pál vezette. Egy ilyen gyakorlat alatt Veress megemlítette a Pólya–Szegő könyvet [57] és tanácsolta, hogy egy páran álljunk össze, és menjünk végig a feladatokon, – nem tud ennél jobb bevezetést az analízisbe. Ez a tanács indította el a mi kis csoportunkat. Az Anonymus szobor nagyon jó találkozó pont volt, úgy emlékszem, szerda délutánonként találkoztunk.
>
> Egy Pólya–Szegőt kölcsönöztünk a könyvtárból és minden héten kimásoltunk 2–3 feladatot, hogy kidolgozzuk a következő hétre. Ez valószínűleg 1929 tavaszán kezdődött, az első résztvevők Turán Pál, Wachsberger Márta, Klein Eszter voltak, de nagyon hamar megnövekedett a csoport. Szekeres György a műegyetemről, időnként Ság Miklós, szintén a műegyetemről. Hamarosan egy fizikai problémakönyvön is dolgoztunk. A nyári szünet sem állította meg ezt a rendszeres találkozást: rossz időben a Matematikai Szemináriumban (?) találkoztunk. Azt hiszem, a következő évben csatlakozott Erdős Pál, hozva Grünwald Tibort[27]. Időnként megjelent Grünwald Géza, aki a Szegedi Egyetemen tanult, és Molnár László, aki Zürichben tanult A következő évben Székely Lili és Elek Tibor kacpsolódtak be, mint rendszeres résztvevők."

* * *

Erdősnek legendás volt az édesanyjával való kapcsolata. A háború és a politikai helyzet miatt tíz évig nem láthatták egymást. Először 1948-ban tért vissza

[26] egyikünk kérésére, 2 évvel ezelőtt.
[27] Azaz, Gallai Tibort.

látogatóba Budapestre. 1955 után rendszeresen hazalátogatott Magyarországra, és attól kezdve egyre több időt töltöttek együtt, ez életének egyik legfontosabb része lett. A 60-as évektől együtt utaztak, együtt élték Erdős vándor életét. Anyja halála teljesen megváltoztatta Erdős életét és életérzését.

* * *

A cikkek, az előadások, a levelezés, és a személyes beszélgetések mind fontos részei voltak Erdős matematikai kapcsolatainak.

Cikkeiben és előadásaiban egy sajátos műfajt alakított ki. Körülbelül 200 problémafelvető cikket írt, amelyek több tucat egy témához kapcsolódó kérdést fogalmaznak meg, és egyben ismertetik a téma hátterét, illetve az addigi részeredményeket. Az utolsó évtizedekben előadásaira is ez volt jellemző, akár plenáris előadást tartott nemzetközi kongresszuson, akár ismeretterjesztő előadást tanárok vagy diákok számára. Az előadásokat részeredményekkel, sejtésekkel, és történetekkel (úgynevezett „erdősizmusokkal") tarkította. Nagyon szeretett matematikáról beszélgetni, középiskolás diákokkal is, és világhírű matematikusokkal egyaránt.

Legendás memóriája volt. Emlékezett a saját és mások eredményeire a kiadásuk helyével és dátumával együtt, több száz matematikussal való több évtizeddel korábbi beszélgetésére, úgy, ahogy más a tegnap történtekre sem emlékszik.

Külön meg kell említenünk a levelezését is, ami része volt napirendjének, életmódjának. Vannak, akik több száz, mások több tucat levelet őriznek, amelyeket Erdős a sajátos, csak rá jellemző stílusában írt, ide-oda ugrálva régi és új matematikai kérdésekről politikára, barátokra és munkatársakra, napi élményeire.

Több ezer kérdést fogalmazott meg, leírta a hozzájuk kapcsolódó részeredményeket. Matematikai híreket közvetített leveleiben, földrajzi és politikai határokon keresztül, közeli barátait és alkalmi ismerőseit közös munkára ösztönözve. (Sok szép eredmény született így, kizárólag levelezés útján.)

* * *

Természetesen bármi, amit Erdősről írunk jellemzőbb lehetett életének egyik szakaszára, mint egy másikra.

A számtalan legenda és anekdota ellenére, amelyek egy részét halála óta tovább színezték, és költötték, Erdősre mindig úgy fogunk emlékezni, mint melegszívű, együttérző, és nagylelkű emberre és a 20. század különlegesen nagyhatású kivételes matematikusára. Erdős briliáns elme, kivételes szellem, és kivételesen mélyérzésű ember volt, aki egy kivételes életvitelt alkotott magának. Reméljük, hogy Erdős Pálról *ez* a kép erősödik majd fel, és marad fenn az idők során.

Hivatkozások

[1] N. Alon and J. Spencer: *The Probabilistic Method,* Wiley Interscience (1992).

[2] L. Babai: In and out of Hungary, Paul Erdős, his friends and times, *Combinatorics, Paul Erdős is 80,* **2/2**, Bolyai Society Math Studies (eds D. Miklós, V. T. Sós and T. Szőnyi (1996), pp. 7–96.

[3] B. Bollobás: *Random Graphs,* Academic Press (1985).

[4] B. Bollobás: The chromatic number of random graphs, *Combinatorica,* **8** (1988), no. 1, 49–55.

[5] B. Bollobás: Paul Erdős - Life and work, in: *The mathematics of Paul Erdős I, Algorithms and Combinatorics,* **13**, Springer Verlag, (eds Graham and Nešetřil), (1997), pp. 1–41.

[6] F. R. K. Chung and R. L. Graham: *Erdős on Graphs, His legacy of unsolved problems,* A. K. Peters, Wellesly (Massachusetts, 1998).

[7] P. Cameron and P. Erdős, Notes on sum-free and related sets, Recent trends in combinatorics (Mátraháza, 1995), *Combin. Probab. Comput.,* **8** (1999), no. 1–2, 95–107.

[8] P. D. T. Elliott: *Probabilistic Number Theory, 1–2,* Springer Verlag (1980).

[9] P. Erdős: Beweis eines Satzes von Tschebyschef (in German), *Acta Litt. Sci. Szeged,* **5** (1932), 194–198.

[10] P. Erdős: Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **53** (1947), 292–294.

[11] P. Erdős: On sets of distances of n points, *Amer. Math. Monthly,* **53**, 248–250.

[12] P. Erdős: Graph Theory and Probability, *Canad. Journal of Math.,* **11** (1959), 34–38.

[13] P. Erdős: Graph Theory and Probability, II, *Canad. Journal of Math.,* **13** (1961), 346–352.

[14] Erdős Pál: Ramsey és van der Waerden tételével kapcsolatos kombinatorikai kérdésekről, *Mat. Lapok,* **14** (1963) 29–37.

[15] Paul Erdős: *Art of Counting* (Selected Writings of Paul Erdős, ed Joel Spencer) MIT Press (1973).

[16] Erdős Pál: Néhány személyes és matematikai emlékem Kalmár Lászlóról, *Mat. Lapok,* **25** (1974) no. 3–4, 253–255, 1977.

[17] P. Erdős: Paul Turán 1910–1976: His work in graph theory, *J. Graph Theory,* **1** (1977), 96–101.

[18] P. Erdős: Some notes on Turán's mathematical work, *J. Approx. Theory,* **29** (1980) no. 1, 2–5.

[19] P. Erdős: Some personal reminiscences of the mathematical work of Paul Turán, *Acta Arith.,* **37** (1980), 4–8.

[20] P. Erdős: *Preface. Personal reminiscences,* Studies in pure mathematics, To the memory of Paul Turán, pp. 11–12, Birkhäuser (Basel–Boston, Mass., 1983).

[21] P. Erdős: On some aspects of my work with Gabriel Dirac, Graph theory in memory of G. A. Dirac, Pap. Meet., Sandbjerg/Den. 1985, *Ann. Discrete Math.,* **41** (1989), 111–116.

[22] P. Erdős: On the combinatorial problems which I would most like to see solved, *Combinatorica,* **1**(1) (1981), (1981), 25–42.

[23] P. Erdős: Personal reminiscences and remarks on the mathematical work of Tibor Gallai, *Combinatorica,* **2** (1982) no. 3, 207–212.

[24] P. Erdős: E. Straus (1921–1983), Number theory (Winnipeg, Man., 1983), *Rocky Mountain J. Math.,* **15** (1985) no. 2, 331–341.

[25] P. Erdős: Ulam, the man and the mathematician, *J. Graph Theory,* **9** (1985) no. 4, 445–449. Also appears in *Creation Math.,* **19** (1986), 13–16.

[26] P. Erdős: My joint work with Richard Rado, in: *Surveys in combinatorics* 1987 (New Cross, 1987), London Math. Soc. Lecture Note Ser., 123, pp. 53–80, Cambridge Univ. Press (Cambridge–New York, 1987).

[27] P. Erdős: Recollections on Kurt Gödel, *Jahrb. Kurt-Gödel-Ges.* **1988**, 94–95.

[28] P. Erdős: Some personal and mathematical reminiscences of Kurt Mahler, *Aust. Math. Soc. Gaz.,* **16**, No. 1, 1–2 (1989).

[29] P. Erdős: On the 120-th anniversary of the birth of Schur, *Geombinatorics,* **5** (1995), No. 1, 4–5.

[30] P. Erdős: On some of my favorite theorems, *Combinatorics, Paul Erdős is 80,* **2**/**2**, Bolyai Society Math Studies, (eds D. Miklós, V. T. Sós and T. Szőnyi (1996), pp. 97–132.

[31] P. Erdős: Some of my favorite problems and results, in: *The Mathematics of Paul Erdős 1* (eds R. L. Graham, J. Nešetřil) (1997), *series:* Algorithms and Combinatorics, **Vol 13**, Springer Verlag 47–67.

[32] Erdős Pál: Néhány megoldatlan elemi geometriai problémáról, *Mat. Lapok,* **2** (1992), no. 2, 1–10.

[33] Erdős Pál: Megjegyzések a Matematikai Lapok két problémájához, *Mat. Lapok,* **71** (1960), 26–32.

[34] P. Erdős and W. H. J. Fuchs: On a problem of additive number theory, *J. London Math. Soc.,* **31** (1956), 67–73.

[35] P. Erdős and L. Lovász: Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, in: *Infinite and finite sets* (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. II; Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10, pp. 609–627, North-Holland (Amsterdam, 1975).

[36] M. Kac and P. Erdős: The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions, *Amer. J. Math.,* **62** (1940), 738–742.

[37] Erdős Pál és Pálfy Péter Pál: Direkt szorzatra nem bontható csoportok rendjéről, *Mat. Lapok,* **33** (1982/86) (1987), no. 4, 289–298.

[38] P. Erdős and A. Rényi: Asymmetric graphs, *Acta Math. Hungar.,* **14** (1963), 295–315.

[39] P. Erdős and A. Rényi: On the strength of connectedness of a random graph, *Acta Math. Hungar.,* **12** (1961), 261–267.

[40] P. Erdős and A. Rényi: On the evolution of random graphs, *Bull. Inter. Stat. Inst. Tokyo,* **38** (1961), 343–347.

[41] P. Erdős and A. Rényi: On the evolution of random graphs, *MTA MKI Közl.,* **5** (1960), 17–61.

[42] P. Erdős, A. Rényi and V. T. Sós: On a problem of graph theory, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **1**(1966), 215–235. (Újranyomtatva [15]-ban).

[43] P. Erdős and M. Simonovits: Some extremal problems in graph theory, Combinatorial Theory and its Appl., *Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai,* **4** (1969) 377–384. (Újranyomtatva [15]-ban.)

[44] P. Erdős and J. Spencer: *Probabilistic methods in combinatorics,* Academic Press (New York–London, 1974).

[45] P. Erdős and Gy. Szekeres: A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.*, **2** (1935), 463–470.

[46] P. Erdős and A. Wintner: Additive arithmetical functions and statistical independence, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 713–721.

[47] R. L. Graham, B. L. Rothschild and J. H. Spencer: *Ramsey theory.* Second edition, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc. (New York).

[48] Hajnal András: Erdős Pál halmazelméleti munkásságáról, hatvanadik születésnapjára, *Mat. Lapok,* **22** (1971), 197–208 (1972).

[49] A. Hajnal: Paul Erdős' set theory, in: *The Mathematics of Paul Erdős 2* (eds R. L. Graham, J. Nešetřil) (1997), *series:* Algorithms and Combinatorics, **Vol 14**, Springer Verlag 352–393. (Az itteni idézet: 359–360. old.)

[50] Hoffmann György és Surányi László: A prímszámtétel első aritmetikai bizonyításának ismertetése, *Mat. Lapok,* **23** (1972), 31–51 (1973).

[51] S. Józsa and E. Szemerédi: The number of unit distances on the plane, *Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai,* **10** (Keszthely, 1973), vol. II, 939–950.

[52] Kalmár László: Gyertek, bizonyítsuk be Csebisev tételét, *Középiskolai Mat. Lapok,* (3 részben) **1** (1947–1948), 89–90, 127–128, 176–182. (Ugyanez folytatódik a KöMaL következő számában is.)

[53] M. Karoński and A. Ruciński, The origins of the theory of random graphs, in: *The Mathematics of Paul Erdős I* (eds R. L. Graham, J. Nešetřil) (1997), *series:* Algorithms and Combinatorics, **Vol 13**, Springer Verlag 311–336.

[54] T. Kővári, Vera T. Sós, P. Turán: On a problem of Zarankiewicz, *Colloq. Math.*, **3** (1954), 50–57.

[55] L. Lovász: On chromatic number of finite set-systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **19** (1968), 59–67.

[56] J. Pach and P. K. Agarwal: *Combinatorial geometry,* Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization,. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc. (New York, 1995).

[57] G. Pólya and G. Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* I–II Band, Springer-Verlag (Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1954). Magyarul is kiadva.

[58] L. Pósa: Hamiltonian circuits in random graphs, *Discrete Math.*, **14** (1976), 359–364.

[59] F. P. Ramsey: On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc. 2nd Series,* **30** (1930), 264–286.

[60] I. Z. Ruzsa: Arithmetical progressions and the number of sums, *Period. Math. Hungar.*, **25** (1992), no. 1, 105–111.

[61] I. Z. Ruzsa: Erdős and the integers, *J. Number Theory,* **79** (1999), no. 1, 115–163.

[62] A. Sárközy: Paul Erdős (1913–1996), *Acta Arith.*, **81** (1997), no. 4, 301–317.

[63] M. Simonovits: Paul Erdős' influence on extremal graph theory, in: *The Mathematics of Paul Erdős II* (eds R. L. Graham, J. Nešetřil) (1997), *series:* Algorithms and Combinatorics, **Vol 14**, Springer Verlag 148–192.

[64] M. Simonovits and V. T. Sós: Foreword. Paul Erdős: the man and the mathematician (1913–1996), in: *Recent Trends in Combinatorics* (Mátraháza, 1995), ix–xx, Cambridge Univ. Press (Cambridge).

[65] J. Spencer, E. Szemerédi and W. T. Trotter: Unit distances in the Euclidean plane, in: *Graph Theorey and Combinatorics* (ed. B. Bollobás) Academic Press (New York, 1984), 293–303.

[66] V. T. Sós: Paul Erdős, 1913–1996, *Aequationes Math.*, (1997), 205–220.

[67] Gy. Szekeres: A Combinatorial Problem in Geometry, [15] bevezető részében, xix–xxii.

[68] E. Szemerédi: On a set containing no k elements in an arithmetic progression, *Acta Arithmetica,* **27** (1975), 199–245.

[69] Turán Pál: Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, *Matematikai Lapok,* **48** (1941), 436–452, (see also [70], [72]).

[70] P. Turán: On the theory of graphs, *Colloq. Math.*, **3** (1954), 19–30 (see also [72]).

[71] Turán Pál: Erdős Pál 50 éves, *Matematikai Lapok,* **14** (1963) / 1–2, pp. 1–28. (angolul is megjelent, [72], [76]).

[72] *Collected papers of Paul Turán,* Akadémiai Kiadó (Budapest, 1989). Vol. 1–3.

[73] P. Turán: A Note of Welcome, *Journal of Graph Theory,* **1** (1977), 7–9.

Konferencia Kötetek

[74] Paul Erdős is 80, 1–2 Combinatorics (eds D. Miklós, V. T. Sós and T. Szőnyi), (1996) *Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Sudies in Math.*, **2** (Invited talks and papers to the conference in honor of Paul Erdős's 80th birthday (Hungary, 1993).

[75] R. L. Graham, J. Nešetřil (editors): The Mathematics of Paul Erdős Vol. 1 (1997), *series:* Algorithms and Combinatorics, **Vol 14**, Springer Verlag.

[76] Paul Erdős and his Mathematics, (szerk: Halász Gábor, Lovász László, Simonovits Miklós és T. Sós Vera) Springer Verlag (2002).

[77] *Recent trends in combinatorics.* Papers from the Combinatorial Workshop on Some Trends in Discrete Mathematics held in Mátraháza, October 22–28, 1995. Edited by Ervin Győri and Vera T. Sós. Combin. Probab. Comput. 8 (1999), no. 1–2.

[78] *Recent trends in combinatorics,* Papers from the Combinatorial Workshop on Some Trends in Discrete Mathematics held in Mátraháza, October 22–28, 1995. Edited by Ervin Győri and Vera T. Sós, Cambridge University Press (Cambridge, 1999), pp. i–iv and 1–192.

Erdős Pál további, a Matematikai Lapokban megjelent cikkei

[79] Erdős Pál, Sárközy András: R. R. Hall egy problémájáról, *Mat. Lapok,* **30** (1978/82), no. 1–3, 23–31.

[80] Erdős Pál: Binomiális együtthatók prímfaktorairól. II, *Mat. Lapok,* **30** (1978/82), no. 4, 307–316.

[81] Erdős Pál: Néhány szokatlan, nem konvencionális, additív számelméleti problémáról, *Mat. Lapok,* **30** (1978/82), no. 1–3, 9–14.

[82] Erdős Pál: Néhány elemi geometriai problémáról, *Köz. Mat. Lapok,* **61** (1980), 49–54.

[83] Erdős Pál: Binomiális együtthatók prímfaktorairól, *Mat. Lapok,* **28** (1977/80), no. 4, 287–296. 10A25 (05A10)

[84] Erdős Pál, Szemerédi, Endre: Megjegyzések az American Mathematical Monthly egy problémájáról, *Mat. Lapok,* **28** (1980), 121–124.

[85] Erdős Pál, Győry Kálmán, Papp Zoltán: A $\sigma(n)$, $\varphi(n)$, $d(n)$ és $v(n)$ függvények néhány új tulajdonságáról, *Mat. Lapok,* **28** (1980), no. 1–3, 125–131.

[86] Erdős Pál, Szalay Mihály: Turán Pál matematikai munkássága, I., Statisztikus csoportelmélet és partíció-elmélet, *Mat. Lapok,* **25** (1974), 229–238.

[87] Erdős Pál, Révész Pál: Varga Tamás egy problémájáról, *Mat. Lapok,* **24** (1973), 273–282.

[88] Erdős Pál, Spencer Joel: Erdős és Hajnal egy problémájáról, *Mat. Lapok,* **22** (1971), 1–2 (1972).

[89] Erdős Pál: Turán Pál gráf tételéről, *Mat. Lapok,* **21** (1970), 249–251 (1971).

[90] Erdős Pál: Hilbert térben levő ponthalmazok néhány geometriai és halmazelméleti tulajdonságáról, *Mat. Lapok,* **19** (1968), 255–258.

[91] Erdős Pál, Gallai T.: Gráfok előírt fokú pontokkal, *Mat. Lapok,* **11/4** (1960), 264–274 (T. Gallai).

[92] Erdős Pál, Hajnal András: Egy kombinatorikus problémáról *Mat. Lapok,* **19** (1968) 345–348.

[93] Erdős Pál: Gráfok páros körüljárású részgráfjairól, *Mat. Lapok,* **18** (1967), 283–288.

[94] Erdős Pál, Hajnal András: Kromatikus gráfokról, *Mat. Lapok,* **18** (1967), 1–4.

[95] Erdős Pál: Számelméleti megjegyzések, V. Extremális problémák a számelméletben, II., *Mat. Lapok,* **17** (1966), 135–155.

[96] Erdős Pál: Ramsey és van der Waerden tételével kapcsolatos kombinatorikai kérdésekről, *Mat. Lapok,* **14** (1963), 29–37.

[97] Erdős Pál: Számelméleti megjegyzések, IV. Extremális problémák a számelméletben, I., *Mat. Lapok,* **13** (1962), 228–255.

[98] Bollobás Béla, Erdős Pál: Gráfelméleti szélsőértékekre vonatkozó problémákról, *Mat. Lapok,* **13** (1962), 143–152.

[99] Erdős Pál: Néhány elemi geometriai problémáról, *Középisk. Mat. Lapok,* **24/5** (1962), 1–9.

[100] Erdős Pál: Számelméleti megjegyzések, III. Néhány additív számelméleti problémáról, *Mat. Lapok,* **13** (1962), 28–38.

[101] Erdős Pál: Számelméleti megjegyzések, II. Az Euler-féle φ-függvény néhány tulajdonságáról, *Mat. Lapok,* **12** (1961), 161–169.

[102] Erdős Pál: Számelméleti megjegyzések, I, *Mat. Lapok,* **12** (1961), 10–17.

[103] Erdős Pál, Surányi János: Megjegyzések egy versenyfeladathoz, *Mat. Lapok,* **10** (1959), 39–48.

[104] Erdős Pál, Surányi János: Egy additív számelméleti probléma, *Mat. Lapok,* **10** (1959), 284–290.

[105] Erdős Pál, Vincze István: Konvex, zárt síkgörbék megközelítéséről, *Mat. Lapok,* **9** (1958), 19–36.

[106] Erdős Pál: Néhány geometriai problémáról, *Mat. Lapok,* **8** (1957), 86–92.

[107] Erdős Pál: Megjegyzések Kővári Tamás egy dolgozatához, *Mat. Lapok,* **7** (1956), 214–217.

[108] Erdős Pál: Megjegyzések a Matematikai Lapok két feladatához, *Mat. Lapok,* **7** (1956), 10–17.

[109] Erdős Pál: Egy kongruenciarendszerekről szóló problémáról, *Mat. Lapok,* **3** (1952), 122–128.

[110] Erdős Pál: Az $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{a}{b}$ egyenlet egész számú megoldásairól, *Mat. Lapok,* **1** (1950), 192–210.

Emlékcikkek: Erdős, 1913–1996

[111] T. Erdélyi and P. Vértesi: In memoriam: Paul Erdős (1913–1996). Bibliography in approximation theory compiled by J. Szabados, *J. Approx. Theory,* **94** (1998), no. 1, 1–41.

[112] A. Sárközy: Paul Erdős (1913–1996), *Acta Arith.*, **81** (1997), no. 4, 301–317.

[113] L. Babai and J. Spencer: Paul Erdős (1913–1996), *Notices Amer. Math. Soc.*, **45** (1998), no. 1, 64–73.

[114] L. Babai: Paul Erdős (1913–1996): his influence on the theory of computing, *STOC '97* (El Paso, TX), 383–401 (electronic), ACM (New York, 1999). 68R10 (68-03 68R05)

[115] T. Łuczak and Z. Palka: Paul Erdős (1913–1996). (Polish) **Wiadom. Mat.,** *33* (1997), 99–109. 01A70

[116] A. Ádám, K. Győry and A. Sárközy: The life and mathematics of Paul Erdős (1913–1996), *Math. Japon.*, **46** (1997), no. 3, 517–526. 01A70

[117] G. Tenenbaum: In memoriam Paul Erdős (1913–1996). (French) *Gaz. Math.*, No. 71 (1997), 13–25. 01A70

[118] Gy. Szekeres: Paul Erdős (1913–1996), *Austral. Math. Soc. Gaz.*, **23** (1996), no. 5, 189–191. 01A70

[119] J. E. Baumgartner: In memoriam: Paul Erdős (1913–1996), *Bull. Symbolic Logic,* **3** (1997), no. 1, 70–72. 01A70 (04-03)

[120] L. Takács: In memoriam: Pál Erdős (1913–1996), *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, **9** (1996), no. 4, 563–564. 01A70

[121] K. Ramachandra: Professor Paul Erdős (1913–1996), an obituary, *Current Sci.*, **72** (1997), no. 1, 78–80. 01A70

Miklós Simonovits, Vera T. Sós: Paul Erdős: the man and the mathematician (1913–1996)

Personal reminiscences of the authors on Paul Erdős's life and mathematics.

Simonovits Miklós és T. Sós Vera
A Magyar Tudományos Akadémia
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézete