

Négydimenziós topológia

Stipsicz András

Előszó

Az elmúlt két évtized topológiájának leggyorsabban és leglátványosabban fejlődő területe a 4-dimenziós sokaságok topológiájának és geometriájának vizsgálata volt. M. Freedman 1982-ben bizonyított tétele [F] topologikus 4-sokaságok teljes leírását adta meg (legalábbis az egyszeresen összefüggő esetben), míg S. Donaldson [D1] alapvető eredménye sima struktúrák nemlétezését látta be bizonyos topologikus 4-sokaságokra. A két tétel közös következményeként vált lehetővé "egzotikus \mathbb{R}^4 -ek" (a standard 4-dimenziós euklideszi térrel homeomorf de nem diffeomorf sokaságok) létezésének belátása. Részint fizikai gyökerekből táplálkozó elméletét továbbfejlesztve, Donaldson 4-sokaságok differenciálható struktúráinak invariánsait találta meg [D2]; ezzel lehetővé vált, hogy a 4-dimenziós h -kobordizmus tétel hamis voltát is belássa.

4-dimenziós sokaságokkal azonban nehéz dolgozni. S. Smale — fogantyú-felbontásokat használó — híres bizonyítása (mellyel 5-nél magasabb dimenziós sokaságokra belátta a h -kobordizmus tételt) nyomán Kirby és tanítványai egy módszert fejlesztettek ki 4-dimenziós sokaságok ábrázolására. Evvel az ún. "Kirby-kalkulussal" egy 4-sokaság fogantyú-felbontását egy speciális (S^3 -beli) lánc kódolja el, a fogantyú-kalkulus műveletei (fogantyú-csúsztatás illetve elhagyható párok elhagyása/bevezetése) pedig a láncon elvégezhető egyszerű műveletekké válnak.

Jelen jegyzet a fent vázolt eredményekből gyűjt össze egy csokorra valót. A fogantyú-kalkulus alapjainak és a Kirby-kalkulusban alkalmazott konvenciók részletes tárgyalása mellett röviden összefoglaljuk a 4-dimenziós sokaságok osztályozásában eddig elért legfontosabb eredményeket. Ezen eredmények megértéséhez röviden áttekintjük a szimmetrikus, bilineáris formák elméletének egy kis fejezetét is. Két előadás szól a h -kobordizmus tételről, az egyikben a magasabb dimenziós vátozat bizonyítását adjuk meg, míg a nyolcadik előadás megmutatja azt a lépést, ahol a korábbi gondolatmenet a 4-dimenziós esetben megakad. E két előadás hivatott demonstrálni a különbséget a 4-dimenziós sokaságok algebrai és geometriai tulajdonságai között — az előbbi a topológiai osztályozáshoz, az utóbbi a sima sokaságok elméletének összetettségéhez vezet. Az utolsó két előadás során a már korábban említett Donaldson-féle sima invariánsok egy továbbfejlesztett vátozatát, az ún. Seiberg-Witten invariánsokat tárgyaljuk nagyon vázlatosan.

A jegyzet az ELTE TTK matematikus szakán tartott sávelőadások anyaga alapján készült, és reményeink szerint további hasonló előadás-sorozatokhoz szolgálhat (legalábbis részben) háttéranyagként. A jegyzet végén található irodalomjegyzék az érdeklődő olvasónak nyújthat segítséget további kutatások elkezdéséhez. Itt szeretnénk köszönetet mondani a Magyar Zoltán Alapítvány és az OTKA támogatásáért.

Stipsicz András
1998. július

Tartalomjegyzék

1 Fogantyúk, fogantyú-felbontások	4
1.1 Bevezető	4
1.2 Fogantyúk	4
1.3 Fogantyú-felbontások homológiái	7
2 Kirby és Heegaard diagramok	8
2.1 Műveletek fogantyúkkal	8
2.2 Heegaard és Kirby diagramok	10
3 Szimmetrikus formák	12
3.1 4-sokaságok kohomológiái	12
3.2 Szimmetrikus unimoduláris formák osztályozása	13
3.3 Néhány unimoduláris forma	14
4 Nevezetes tételek 4-sokaságokra	16
4.1 4-sokaságok homotópia és homeomorfia típusai	16
4.2 A 4.1.1 tétel bizonyítása	17
5 Példák 4-sokaságokra	19
5.1 Néhány egyszerű példa	19
5.2 4-sokaságok metszetformái	20
5.3 Felfújás	21
6 Kirby diagramok	24
6.1 Egy új jelölés	24
6.2 Kirby-kalkulus	26
7 Kobordizmusok, h-kobordizmusok	31
7.1 h -kobordizmusok	31
7.2 A h -kobordizmus tétel bizonyítása	31
8 h-kobordizmusok 4-dimenziós sokaságok között	34
8.1 h -kobordizmusok és metszetformák	34
8.2 Casson tornyok és fogantyúk	35
8.3 Egzotikus \mathbb{R}^4 -ek	37
9 Spin és spin^c struktúrák	42
9.1 Spin struktúrák	42
9.2 Spin^c struktúrák	44

10 4-sokaságok sima invariánsai	47
10.1 Seiberg-Witten egyenletek	47
10.2 Tétel Seiberg-Witten invariánsokra	49
10.3 A modulustérről	50

1. előadás

Fogantyúk, fogantyú-felbontások

1.1 Bevezető

A továbbiakban feltesszük, hogy az olvasó jártas az algebrai topológia alapjaiban, így hivatkozás nélkül használunk homológia- és homotópia-elméleti alaptételeket és fogalmakat (mint pl. Poincaré dualitás ill. irányítás). Ugyanígy feltesszük, hogy nyalábok, principális és asszociált nyalábok, és azok szelései ismert fogalmak; hasonlóan, Morse elméleti fogalmakat is használni fogunk hivatkozás nélkül.

Egy X (szeparábilis) Hausdorff topologikus teret n -dimenziós topologikus sokaságnak nevezünk, ha minden $p \in X$ pontra létezik egy olyan $U \subset X$ (p -t tartalmazó) nyílt környezet, mely $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, x_n \geq 0\}$ nyílt részével homeomorf egy $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}_+^n$ leképezés mentén. Egy ilyen (U_α, ϕ_α) párt *térképnek* hívunk; térképek egy halmazát pedig *atlasznak* nevezzük, ha $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$. Az (U_α, ϕ_α) és (U_β, ϕ_β) térképek közötti $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}: \phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta)$ függvényt *átmenő függvénynek* nevezzük. Egy $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ atlasz C^r -struktúrát definiál, ha az atlaszhoz tartozó térképpárookra az átmenő függvények r -szer folytonosan differenciálhatók ($r = 1, \dots, \infty$). Az $r = \infty$ esetben az X sokaságot (a fenti atlaszsal ellátott) *sima sokaságnak* nevezzük. X azon pontjainak halmazát, melyek az $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\} \subset \mathbb{R}_+^n$ részre képződnek, X határának nevezzük és ∂X -szel jelöljük.

1.1.1. példa. A $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq 1\}$ peremes sokaságot n -dimenziós *diszknak* (vagy *golyónak*) hívjuk. Ennek $S^{n-1} = \partial D^n$ peremét $(n-1)$ -dimenziós *gömbnek* nevezzük.

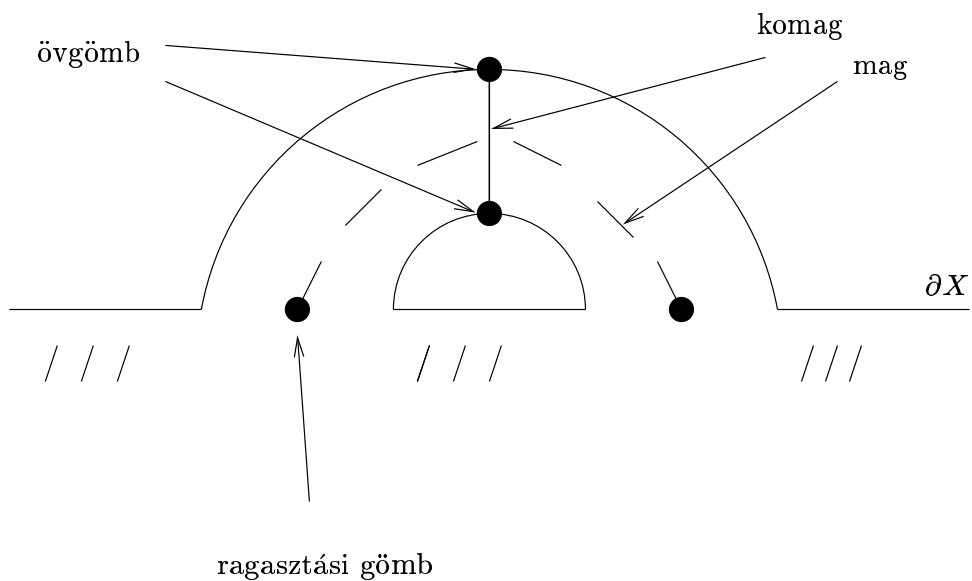
1.2 Fogantyúk

Sokaságokat tehát atlaszunkkal adhatunk meg, ezek kezelése azonban nehézkes. A következőkben — a fogantyú-felbontás bevezetésével — sokaságok egy kezelhetőbb leírását adjuk meg. Mint látni fogjuk, fogantyú-felbontások különösen jól írhatók le alacsony (legfeljebb négy) dimenziós esetekben.

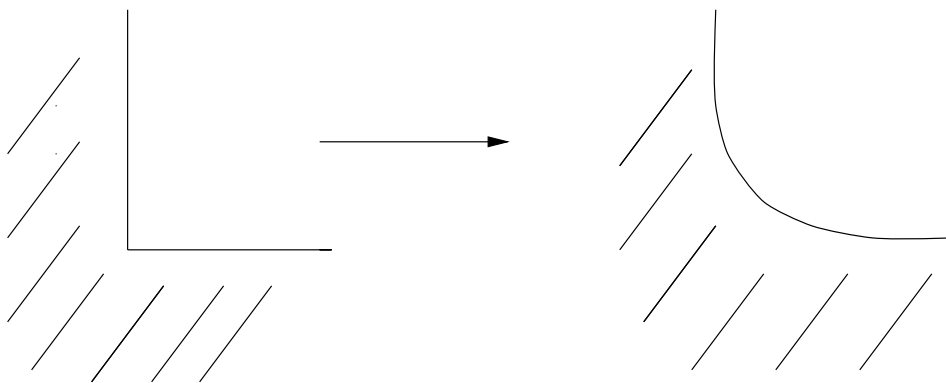
1.2.1. definíció. A $D^k \times D^{n-k}$ szorzatot (mely természetesen a D^n diszkkal diffeomorf) n -dimenziós k indexű *fogantyúnak* nevezzük. $D^k \times \{0\}$ a fogantyú *magja*, $\{0\} \times D^{n-k}$ a *komagja*; $\partial D^k \times \{0\}$ -t (tehát a mag határát) a fogantyú *ragasztási gömbjének* míg a $\{0\} \times \partial D^{n-k}$ részt (ami a komag határa) a fogantyú *övgömbjének* nevezzük. (Lásd az 1.1 ábrát.)

Legyen X^n adott n -dimenziós peremes sokaság. Egy $\varphi: \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial X$ beágyazással a $D^k \times D^{n-k}$ k -fogantyút X -hez ragaszthatva egy $X \cup_\varphi D^k \times D^{n-k}$ új sokaságot kapunk.

1.2.2. megjegyzés. A fent leírt $X \cup_\varphi D^k \times D^{n-k}$ sokaságnak "sarkai" lesznek — olyan pontok tehát, melyek környezete $\mathbb{R}_{++}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{R}, x_{n-1} \geq 0, x_n \geq 0\}$ origójának egy környezetével diffeomorf —, ezeket azonban kanonikusan "le lehet kerekíteni", vagyis $X \cup_\varphi D^k \times D^{n-k}$ -n egyértelműen adható meg egy sokaság struktúra. (Lásd az 1.2 ábrát a kétdimenziós esetben.) Ha X sima és φ egy C^∞ -beágyazás, akkor a kapott sokaság is sima lesz.



1.1 ábra: Egy fogantyú felépítése



1.2 ábra: Egy sarok lekerekítése

1.2.3. definíció. Legyen X adott sokaság és tegyük fel, hogy $\partial X = \overline{\partial_- X} \cup \partial_+ X$ — vagyis a határt két diszjunkt részre osztjuk és az egyiket az X által indukált irányítást megfordítjuk. Egy olyan, X -szel izomorf (tehát diffeomorf vagy homeomorf) sokaságot, melyet a fent leírt fogantyú-ragasztás $\partial_- X \times I$ -re való $\partial X \times \{1\}$ menti (ismételt) alkalmazásával kapunk, $(X, \partial_- X)$ *relatív fogantyú-felbontásának* nevezzük. Amennyiben $\partial_- X = \emptyset$, akkor (abszolút) fogantyú-felbontásról beszélünk.

Vegyük észre, hogy egy X sima sokaságra egy Morse függvény éppen egy fogantyú-felbontást indukál. (Fogantyú-felbontást azonban találhatunk nem feltétlenül sima sokaságokra is — valójában minden olyan topologikus sokaságra létezik fogantyú-felbontás, melynek dimenziója négytől különböző. Négy dimenzióban pontosan azokra a sokaságokra található fogantyú-felbontás, melyek sima struktúrát hordoznak.) Tehát:

1.2.4. tétel. *Az $(X, \partial_- X)$ sima kompakt párra létezik fogantyú-felbontás. Ha X nem-kompakt, de $\partial_- X$ igen, akkor is létezik X -re (esetleg végtelen sok fogantyút tartalmazó) fogantyú-felbontás. \square*

Egy fogantyú-felbontás megadásához pusztán a $\varphi: \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial X$ beágyazásokat kell megadnunk. Egy ilyen leképezést két adat határoz meg:

- (I) egy $\varphi_0: S^{k-1} \rightarrow \partial X$ beágyazás, melynek normálnyalábja triviális;
- (II) és a $\nu\varphi_0(S^{k-1})$ normálnyaláb egy $f: \nu\varphi_0(S^{k-1}) \cong S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$ trivializációja.

Egy fogantyú odaragasztását tehát φ_0 *ragasztó leképezése* (vagyis egy ∂X -beli beágyazott $(k-1)$ -dimenziós gömb) és egy f trivializáció — a fogantyú *tüskézése* — határozza meg. Számos esetben, pusztán dimenzió-okokból S^{k-1} egyértelműen ágyazódik be ∂X -be, és sokszor a tüskézés is egyértelmű. Két tüskézés S^{k-1} minden pontjában egy $GL(n-k)$ -beli elembe különbözik, tehát a különböző tüskézéseket $S^{k-1} \rightarrow GL(n-k)$ leképezésekkel, vagyis a $\pi_{k-1}(GL(n-k)) \cong \pi_{k-1}(O(n-k))$ csoporttal lehet paraméterezni. Vegyük azonban észre, hogy a tüskézéseket általában nem tudjuk $\pi_{k-1}(O(n-k))$ elemeivel azonosítani, mivel (általában) nincs a $0 \in \pi_{k-1}(O(n-k))$ elemnek megfelelő kanonikus választás.

- 1.2.5. példák.** (a) Egy 0-fogantyút (tehát $D^0 \times D^{n-t}$) a $\partial D^0 \times D^n = \emptyset$ mentén ragasztunk; ezekkel (és csak ezekkel) a fogantyúkkal tudjuk az abszolút esetben a fogantyú-felbontás felépítését elkezdni. 0-fogantyúk ragasztása nyilván egyértelmű.
- (b) Egy 1-fogantyú ragasztó gömbje $S^0 = \{\text{két pont}\}$, így φ_0 egyértelmű ha ∂X összefüggő. Mivel $\pi_0(O(n-1)) \cong \mathbb{Z}_2$, egy 1-fogantyút kétféle tüskézéssel lehet ragasztani; az egyik irányítható, a másik nem-irányítható sokaságot ad (feltéve, hogy X irányítható és ∂X összefüggő).
- (c) Mivel $n > 2$ esetén $\pi_{n-2}(O(1)) = \pi_{n-1}(O(0)) = 0$, ezekben az esetekben az n - és $(n-1)$ -fogantyúk tüskézése egyértelmű. Vagyis $n > 2$ esetén az n - és $(n-1)$ -fogantyúkat a φ_0 ragasztó leképezés meghatározza.
- (d) Végül tekintsük a $k = 2$ esetet. Ismert, hogy $n > 4$ esetén $\pi_1(O(n-2)) = \mathbb{Z}_2$ és $\pi_1(O(2)) = \mathbb{Z}$, vagyis $n > 4$ -re 2-fogantyúknak kétféle tüskézése van, $n = 4$ esetén pedig a tüskézéseket \mathbb{Z} paraméterezi. Dimenzió okokból a $\varphi_0: S^1 \rightarrow \partial X$ ragasztó leképezés $n > 4$ -re egyértelmű, $n = 4$ esetén pedig egy csomó a ∂X 3-dimenziós sokaságban.

Egy adott fogantyú-felbontást a “feje tetejére” állíthatunk (hasonlóan ahhoz, ahogy Morse elméletben az f függvényt $(1-f)$ -re cserélhetjük): tekintsünk egy $D^k \times D^{n-k}$ fogantyút $\overline{\partial_+ X}$ -hez az övgömbje mint ragasztási gömb mentén odaragasztott $(n-k)$ -fogantyúnak. Ily módon X -nek egy $(X, \overline{\partial_+ X})$ relatív fogantyú-felbontását kapjuk, amit az eredeti felbontás duálisának hívunk.

Vegyük észre, hogy fogantyúkat tetszőleges sorrendben ragaszthatunk ∂X -hez. Mint azt a következő állítás mutatja, feltehető azonban, hogy a fogantyúkat indexük szerinti növekvő sorrendben ragasztottuk.

1.2.6. tétel. *Legyen h^r és h^t egy-egy r és t indexű fogantyú, legyen továbbá $X' = X \cup h^r \cup h^t$ és tegyük fel, hogy $t \leq r$. Ekkor $X' \approx X \cup h^t \cup h^r$, vagyis a fogantyúk ragasztásának sorrendje felcserélhető.*

Bizonyítás. A h^r fogantyút $\partial D^r \times D^{n-r}$ mentén ragasztjuk ∂X -hez, majd a kapott n -dimenziós sokaság pereméhez ragasztjuk h^t -t. Ha ez utóbbi ragasztásról feltehetjük, hogy diszjunkt h^r övgömbjétől, akkor annak kis környezetétől, következésképp a h^r fogantyútól is diszjunkt lesz, amivel a bizonyítás készen is lenne. Mivel h^r övgömbje S^{n-r-1} , h^t ragasztási gömbje pedig S^{t-1} egy kópiája $\partial(X \cup h^r)$ -ben, ezekről $\dim \partial(X \cup h^r) = n - 1$ és $t \leq r$ (vagyis $\dim S^{n-r-1} + \dim S^{t-1} = n - r - 1 + t - 1 \leq n - 2$) miatt feltehetjük, hogy diszjunktak. \square

1.2.7. következmény. *Adott $(X, \partial_- X)$ véges fogantyú-felbontás átrendezhető úgy, hogy a fogantyúk indexük szerint növekvő sorrendben kövessék egymást. Végtelen sok fogantyút tartalmazó felbontásra a fenti állítás nem feltétlenül igaz.* \square

1.2.8. feladatok. (a) Adjunk egy fogantyú-felbontást S^1 -re.

(b) Találjunk egy fogantyú-felbontást a Σ_g zárt, irányítható g génuszú (2-dimenziós) felületre.

1.3 Fogantyú-felbontások homológiái

A definíció alapján könnyen látható, hogy egy fogantyú-felbontás az X sokaságon egy CW-felbontást is megad — a fogantyúk n -dimenzióra megvastagított cellákként is felfoghatók. Tegyük fel tehát, hogy az X irányított sokaságra $(X, \partial_- X)$ -en adott egy véges fogantyú-felbontás. Legyen h_1 egy $(k + 1)$ - míg h_2 egy k -fogantyú a fenti fogantyú-felbontásban. Jelölje $\alpha(h_1, h_2)$ a h_1 fogantyú $S_a(h_1)$ ragasztó gömbjének a h_2 fogantyú $S_b(h_2)$ övgömbjével vett algebrai metszetét.

1.3.1. megjegyzés. Mivel $S_a(h_1)$ és $S_b(h_2)$ komplementer dimenziós gömbök, és feltehető, hogy $S_a(h_1)$ transzverzálisan metszi $S_b(h_2)$ -t, az $S_a(h_1) \cap S_b(h_2)$ metszet véges sok pontból áll. A fenti gömbök irányításával minden $p \in S_a(h_1) \cap S_b(h_2)$ ponthoz egy előjel rendelhető: ez az előjel $+$ ha $T_p S_a(h_1)$ egy pozitívan irányított bázisát $T_p S_b(h_2)$ egy pozitívan irányított bázisával összefűzve $T_p X$ egy pozitívan irányított bázisát kapjuk; az előjel $-$ egyébként. (Emlékezzünk vissza arra, hogy X irányíthatóságát feltettük.) Az így kapott előjelek összegét nevezzük h_1 és h_2 *algebrai metszetének*. Vegyük észre, hogy $\alpha(h_1, h_2)$ nemcsak $S_a(h_1)$ és $S_b(h_2)$ irányításától (mely szükséges ahhoz is, hogy a h_1 és h_2 fogantyúk \mathbb{Z} együtthathós homológia elemeket definiáljanak), hanem h_1 és h_2 sorrendjétől is függ.

Jelölje C_k a felbontás k indexű fogantyúi által generált szabad Abel csoportot, és definiáljunk a $\partial h = \sum_j \alpha(h, h_j) h_j$ (h indexe $(k + 1)$, míg a h_j fogantyúk indexe k) formulával egy $\partial: C_{k+1} \rightarrow C_k$ homomorfizmust. Mivel egy fogantyú megvastagított cellaként fogható fel, a következő eredmény adódik:

1.3.2. tétel. *A (C_k, ∂) lánc homológiája izomorf a $H_*(X, \partial X; \mathbb{Z})$ homológia-csoporttal.* \square

1.3.3. feladatok. (a) Lássuk be, hogy egy g génuszú Σ_g (zárt, irányított) felület minden fogantyú-felbontásában legalább $2g$ darab 1-fogantyú szerepel.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\partial X = \emptyset$ és X irányítható, akkor X^n minden fogantyú-felbontásában szerepel legalább egy 0- és egy n -fogantyú.

(c) Lássuk be, hogy S^1 minden fogantyú-felbontásában páros sok fogantyú szerepel. Bizonyítsuk be ugyanezt minden S^n ($n \geq 1$) gömbre is.

2. előadás

Kirby és Heegaard diagramok

2.1 Műveletek fogantyúkkal

Egy adott fogantyú-felbontásra két olyan alapvető művelet létezik, mely csak a felbontást — és nem a sokaság diffeomorfizmus-osztályát — változtatja: ezek a fogantyú-csúsztatás és elhagyható párok bevezetése/elhagyása. A következőkben e két műveletet fogjuk részleteiben tárgyalni. (Egyszerűség kedvéért a továbbiakban mindig feltesszük, hogy a szóbanforgó sokaságok irányíthatók.)

Legyen tehát X rögzített sokaság és h_1, h_2 két X -hez ragasztott k -fogantyú; az 1.2.6 tétel miatt feltehető hogy a két fogantyú diszjunkt. A h_1 fogantyú h_2 -n való *átcsúsztatásán* a következőt értjük. Legyen $X' = X \cup h_2$, és vegyük a h_1 fogantyú $S_a(h_1)$ ragasztási gömbjének egy $x \in S_a(h_1) \subset \partial_+ X'$ pontját. Legyen továbbá $y \in S_b(h_2) \subset \partial_+ X'$ a h_2 fogantyú övgömbjének egy rögzített pontja. A fenti két pontot $\partial_+ X'$ -ben egy $\gamma: [0, 1] \rightarrow \partial_+ X'$ beágyazott úttal összekötve vehetjük γ nyílt tubuláris környezetét, mely tehát $M = (-\epsilon, 1 + \epsilon) \times \text{int } D^{n-2}$ -vel diffeomorf. Az M térben könnyen található egy olyan ϑ_t ($t \in [0, 1]$) izotópia, melyre $\vartheta_0 = \text{id}_M$, $\vartheta_t(x) \in \gamma([0, 1])$ és $\vartheta_1(x) = y$, valamint ϑ_t a γ szakasz egy kis nyílt környezetén kívül (melynek még lezárta is M -beli) az identitás. Ekkor ϑ_t a $\partial_+ X'$ egy izotópiájává terjeszthető ki, mely tehát az $S_a(h_1)$ ragasztási gömböt $\vartheta_1(S_a(h_1))$ gömbbe mozgatja, amikoris az elmetszi $S_b(h_2)$ -t. Mivel $\dim S_a(h_1) + \dim S_b(h_2) = n - 2$, az y pontban a $T_y \vartheta_1 S_a(h_1) \oplus T_y S_b(h_2)$ összeg $T_y \partial_+ X'$ -nek 1-kodimenziós alterét adja: a kimaradó dimenzió negatív iránya azt az irányt mutatja ahonnan $S_a(h_1)$ a ϑ_t izotópiával érkezett, a pozitív pedig azt, amerre az izotópia folytatható.

2.1.1. definíció. Válszunk egy fenti ϑ_t izotópiát majd folytassuk azt $t \in [0, 1 + \epsilon]$ -ra és egy további φ_s izotópiával mozgassuk $\vartheta_{1+\epsilon}(S_a(h_1))$ -et vissza $\partial_+ X$ -be. (Ez megtehető pl. a h_2 fogantyúról a $D^k \times \{p\}$ maggal párhuzamos diszk mentén való radiális letolással, ahol $y = (0, p)$.) Ily módon tehát egy $\varphi_s \circ \vartheta_t: \partial_+ X' \rightarrow \partial_+ X'$ izotópiát kapunk, melyre $S'_a(h_1) = \varphi_1 \circ \vartheta_{1+\epsilon}(S_a(h_1)) \subset \partial_+ X$. Ezt az izotópiát az $S_a(h_1)$ normálnyalábjának egy trivializációjára (tehát h_1 egy tüskézésére) alkalmazva $S'_a(h_1)$ -nek kapjuk egy tüskézését. Az új fogantyút (amit tehát a fenti $S'_a(h_1)$ gömb mentén ragasztunk a kapott tüskézéssel) a h_1 fogantyú h_2 -n való *átcsúsztatottjának* nevezzük.

Mivel a ragasztási leképezéseket csak izotópiával változtattuk, a kapott fogantyú-felbontás az eredetivel diffeomorf sokaságot ad. A fenti operáció nemcsak h_1 -től és h_2 -től függ, hiszen γ -t és ϑ_t -t is szabadon választhatjuk. A fenti konstrukció alapján az is világos, hogy az új fogantyú — melyet $h_1 \pm h_2$ -vel szokás jelölni — ragasztási gömbje éppen h_1 és h_2 ragasztási gömbjeinek γ út menti összefüggő összege lesz. Pontosabban, vegyünk egy, a h_2 ragasztási gömbjével párhuzamos $\partial D^k \times \{p\}$ gömböt, és ennek a γ út menti összefüggő összegét $S_a(h_1)$ -gyel — az így kapott gömb lesz a $h_1 \pm h_2$ fogantyú ragasztási gömbje. Látható tehát, hogy a fogantyú-csúsztatás a homológiák szintjén egy $\{h_1, h_2\} \rightarrow \{h_1 \pm h_2, h_2\}$ bázistranszformációnak felel meg. Emlékezzünk vissza arra, hogy h_1 előjelét a C_k csoportban csak $S_a(h_1)$ egy irányításának rögzítésével kapjuk meg — ha az összefüggő összeg az irányításokat tartja, akkor a csúsztatással $h_1 + h_2$ -t, ha fordítja akkor $h_1 - h_2$ -t kapunk C_k -ban.

A másik fent említett alapvető művelet elhagyható párok bevezetése/elhagyása.

2.1.2. definíció. Egy (h_1^k, h_2^{k-1}) fogantyú-párt *elhagyható párnak* nevezünk, ha a két fogantyú uniója D^n -nel diffeomorf, és az unió ∂X -hez $D^{n-1} \subset \partial D^n$ mentén van odaragasztva. (Ebből adódóan X és $X \cup h_2^{k-1} \cup h_1^k$ diffeomorfak.)

2.1.3. állítás. A D^n n -dimenziós diszk minden $k \leq n$ -re felbontható egy (h_1^k, h_2^{k-1}) elhagyható pár uniójára.

Bizonyítás. Legyen $D^n = D^k \times D^{n-k}$ és osszuk fel ∂D^k -t $D_+^{k-1} \cup D_-^{k-1}$ (az alsó és a felső félgömb) uniójára. Ragasszuk D^n -t a $D_-^{k-1} \times D^{n-k}$ diszk mentén ∂X -hez; ily módon nyilván nem változtatjuk meg X diffeomorfizmus-típusát. Vegyük $D_+^{k-1} \subset D^k$ egy kis környezetét, ami tehát $D_+^{k-1} \times D^1 \subset D^k$ -t, illetve egy $(D_+^{k-1} \times D^1) \times D^{n-k} \subset D^n$ részt definiál. Ily módon egy h_2 $(k-1)$ -fogantyút kapunk, amit $(D_+^{k-1} \cap D_-^{k-1}) \times D^{n-k}$ mentén ragasztottunk ∂X -hez. (Ez utóbbi $(S^{k-2} \times D^1) \times D^{n-k}$ -vel diffeomorf, vagyis az így definiált h_2 valóban egy $(k-1)$ -fogantyú.) Az eredeti D^n diszk h_2 -n kívüli része tehát $X \cup h_2$ -höz van egy $\partial D^k \times D^{n-k}$ -vel diffeomorf rész mentén odaragasztva, így valóban egy h_1 k -fogantyút alkot. Vegyük észre, hogy h_1 ragasztási és h_2 övgömbje egy pontban metszik egymást. \square

A következő tétel a fenti észrevétel megfordítottját mondja ki:

2.1.4. tétel. Legyen (h_1^k, h_2^{k-1}) fogantyú-pár egy adott fogantyú-felbontásban. Ha h_1 ragasztási és h_2 övgömbje egy pontban metszik egymást, akkor (h_1, h_2) egy elhagyható párt alkot.

Bizonyítás. A k -fogantyú ragasztási gömbjének egy (megfelelően kis) diszk-komplementumát a $(k-1)$ -fogantyúba olvasztva az előző állításban szereplő modellt kapjuk meg, amiről pedig látható, hogy elhagyható párt alkot. \square

A két művelet alapvető fontosságát a következő tétel mutatja.

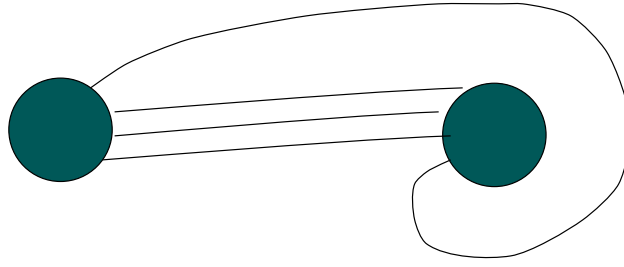
2.1.5. tétel. (Cerf, [Ce]) Két relatív fogantyú-felbontás pontosan akkor ad diffeomorf sokaságokat, ha az egyik fogantyú-csúsztatások, elhagyható párok elhagyása/bevezetése és izotópiák véges sokszori alkalmazásával a másikba alakítható. \square

2.1.6. megjegyzés. Mivel egyik fent felsorolt módosítás sem változtatja meg a fogantyú-felbontás diffeomorfizmus-típusát, a 2.1.5 tétel egyik iránya kézenfekvő. A másik irány (tehát hogy diffeomorf fogantyú-felbontások a három operációval egymásba alakíthatók) bizonyítása a következő ötleten alapul: vegyünk két, a felbontásokat indukáló Morse függvényt, és kössük össze ezeket a Morse függvények terében egy γ_t úttal. Ezt a függvényteret analizálva belátható, hogy a γ_t út választható úgy, hogy véges sok t értéktől eltekintve a Morse függvények injektívek legyenek kritikus pontjaik halmazán. A véges sok t értékben pedig vagy azonos indexű kritikus pontok képződnek ugyanarra a kritikus értékre (ez felel meg a fogantyú-csúsztatásnak), vagy szomszédos indexű kritikus pontok keletkeznek/tűnnek el (ami elhagyható párok bevezetésének/elhagyásának felel meg). A részletekről lásd [Ce], [K1]. A továbbiakban a 2.1.5 tételnek csak a triviális irányát fogjuk használni.

2.1.7. állítás. Adott összefüggő fogantyú-felbontásról feltehető, hogy legfeljebb egy 0-fogantyút tartalmaz. (Ha $\partial_- X = \emptyset$, akkor pontosan egyet, ha $\partial_- X \neq \emptyset$, akkor egyet sem.) A duális felbontást véve hasonló látható be n -fogantyúkra is.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\partial_- X = \emptyset$; ekkor a fogantyú-felbontás elkezdéséhez szükség van 0-fogantyúra (lásd még az 1.3.3(b) feladatot). Két 0-fogantyút egy 1-fogantyú köt össze (hiszen az 1-fogantyú az egyetlen olyan fogantyú-típus, melynek ragasztási gömbje nem összefüggő), így az egyik 0- és az 1-fogantyú elhagyható párt alkot. Amennyiben $\partial_- X \neq \emptyset$, a fenti érveléssel minden 0-fogantyú elhagyható. (Vegyünk észre, hogy egy fenti tulajdonságú 1-fogantyú létezéséhez fel kellett tennünk, hogy a sokaság összefüggő.) A duális felbontás vételével a fenti átalakítás után belátható, hogy $\partial_+ X = \emptyset$ esetén egyetlen n -fogantyú, $\partial_+ X \neq \emptyset$ esetén pedig egy n -fogantyú sem szerepel a fogantyú-felbontásban. \square

2.1.8. feladatok. (a) Lássuk be, hogy egy 0- és k darab 1-fogantyú uniója $\#kS^1 \times D^{n-1}$ -gyel diffeomorf. (Emlékezzünk arra, hogy irányíthatóságot minden sokaságról feltettünk.) (Ötlet: Lássuk be először $k=1$ -re, majd alkalmazzunk indukciót.)



2.1 ábra: Egy Heegaard diagram

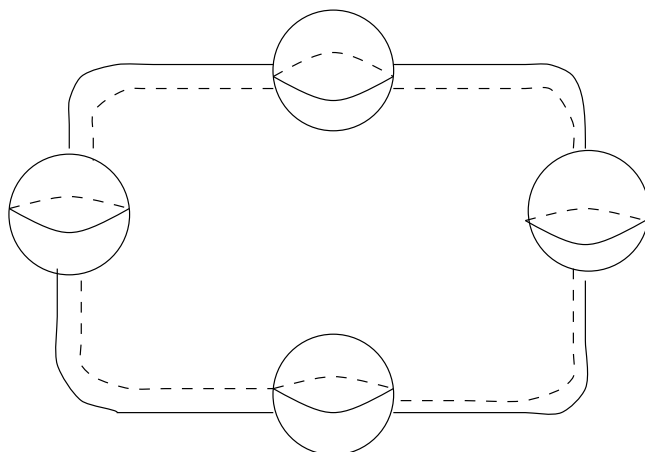
- (b) Bizonyítsuk be, hogy egy zárt, összefüggő 1-dimenziós sokaság diffeomorf S^1 -gyel.
- (c) Osztályozzuk a zárt, összefüggő 2-dimenziós sokaságokat.

2.2 Heegaard és Kirby diagramok

A fentiek értelmében tehát egy M zárt 3-sokaság egy 0-, egy 3-, k darab 1- és k darab 2-fogantyúval építhető fel. (Az 1- és 2-fogantyúk száma megegyezik, hiszen a 2.1.8(a) feladat értelmében $M_1 = \{0\text{-fogantyú} \cup 1\text{-fogantyúk}\} = \#k_1 S^1 \times D^2$ a k_1 darab 1-fogantyúra, míg a duális felbontás vételével $M - \text{int } M_1 = \{3\text{-fogantyú} \cup 2\text{-fogantyúk}\} = \#k_2 S^1 \times D^2$ a k_2 darab 2-fogantyúra. Mivel $\partial M_1 \approx \partial(M - M_1)$, $k_1 = k_2$ következik.) A 0-fogantyú D^3 egy kópiája, melynek S^2 határát $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ -vel azonosítva az 1-fogantyúk ragasztási gömbjei a síkba rajzolhatók. (Emlékezzünk, hogy M irányíthatóságát feltéve egy 1-fogantyú tüskézése egyértelmű.) Az 1-fogantyúkat tehát diszk-párok jelképezik; a 2-fogantyúkat pedig ∂M_1 -beli ragasztási köreikkel jelölhetjük. (Ismét, 1.2.5(c) miatt a tüskézés egyértelmű.) Ezek tehát olyan "körök" a síkban, melyek egy 1-fogantyú egyik diszkjébe futva a másikban fognak kijönni, hiszen közben átmennek az 1-fogantyún. Tegyük fel, hogy egy 2-fogantyú ragasztási köre egy 1-fogantyún annak magjával párhuzamosan halad át. Az 1-fogantyúk diszkpárjait a középpontjaikat összekötő szakasz felezőmerőlegesére való tükrözéssel azonosítva a 2-fogantyú ragasztási köreinek \mathbb{R}^2 -be eső része meghatározza a köröket a $\partial(\{0\text{-fogantyú} \cup 1\text{-fogantyúk}\}) = \partial(\#k S^1 \times D^2)$ 2-sokaságban. Ilymódon tehát $M_2 = D^3 \cup \{1\text{-fogantyúk}\} \cup \{2\text{-fogantyúk}\}$ egy \mathbb{R}^2 -beli rajzzal jelképezhető. Mivel a 3-fogantyú ragasztása már egyértelmű, a fent leírt diagram, az M 3-sokaság *Heegaard diagramja* jeleníti meg a 3-sokaságot. A 2.1 ábra példát mutat egy Heegaard diagramra.

2.2.1. megjegyzés. A fentiek szerint M előáll $(\{0\text{-fogantyú} \cup 1\text{-fogantyúk}\}) \cup (\{2\text{-fogantyú} \cup 3\text{-fogantyú}\})$ unióként; a 2.1.8(a) feladat szerint mindkét rész egy g génuszú felület tömör H_g belsejével azonosítható. Egy 3-sokaság ilyen felbontását *Heegaard felbontásnak* nevezik. Ilymódon tehát egy M 3-sokaság egy g szám és egy $f: \partial H_g \rightarrow \partial H_g$ diffeomorfizmus segítségével írható le. (A Heegaard diagram éppen ∂H_g megfelelő köreinek képét adja meg ∂H_g egy másik kópiájában.) Az $\{f: \partial H_g \rightarrow \partial H_g \mid f \text{ diffeomorfizmus}\}$ csoportnak az identitást tartalmazó komponenssel vett faktorát az \mathcal{M}_g *leképezés-osztály csoportnak* nevezzük. Mivel f -et a fenti $f: \partial H_g \rightarrow \partial H_g$ azonosításhoz csak izotópia erejéig kell megadnunk, elégséges az $[f] \in \mathcal{M}_g$ elemet leírni ahhoz, hogy M -et visszakapjuk. Következésképp M leírásához pusztán g -t és az $[f] \in \mathcal{M}_g$ csoportelemet kell megadni. Az \mathcal{M}_g csoport azonban még nem teljesen feltérképezett, így a 3-sokaságok osztályozása még nem teljes.

Egy 4-dimenziós (zárt, irányítható) sokaság esetében egy 0-, egy 4- és néhány 1-, 2- és 3-fogantyút kell ábrázolnunk. Ismét tekinthetjük a 0-fogantyú S^3 peremét mint $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ -t; ebben az 1-fogantyúk ragasztási gömbjei tehát gömbpárokként, a 2-fogantyúk ragasztási körei pedig (esetleg az 1-fogantyúk gömbjeibe belefutó, és a másik gömbből ismét előtűnő) körökkel jelképezhetők. (Rajzolni csak \mathbb{R}^3 -ban tudunk — amennyiben egy 2-fogantyú ragasztási köre egy 1-fogantyún halad át, feltesszük, hogy a fogantyún annak magjával párhuzamosan megy át.) Irányíthatóságot feltételezve az 1-fogantyúk tüskézése egyértelmű; 2-fogantyúkra azonban a tüskézések egy affin \mathbb{Z} -teret alkotnak. Egy 2-fogantyú tüskézését (ami tehát a beágyazott S^1 normálnyalábjának trivializációja) egy, a ragasztási körrel párhuzamos $\partial D^2 \times \{p\}$ kör meghatározza; hiszen $\nu(\text{ragasztási kör}) \cong S^1 \times D^2 \cong S^1 \times \mathbb{C}$ -t egy sehol sem eltűnő szelés trivializál. Ilymódon tehát a 0-, 1-



2.2 ábra: Egy Kirby diagram

és 2-fogantyúk unióját egy olyan \mathbb{R}^3 -beli rajz szemlélteti, ahol az 1-fogantyúkat gömbpárok jelképezik, a 2-fogantyúknak pedig olyan körök felelnek meg, amik egy gömbbe futva a pár másik gömbjében jelennek meg újra (amikor is S^1 átmegy az 1-fogantyún), és minden ilyen ragasztási kör mentén fut egy (esetleg más színnel megkülönböztetett vagy szaggatott vonallal jelzett) kíséző kör, mely a tüskézést mutatja meg. A 3-fogantyúk ragasztási gömbjeinek rajzolása némileg nehezebb feladat, mivel az eddigi fogantyú-felbontás határába ágyazott S^2 -ket kellene lerajzolni. A következő tétel értelmében azonban ez szükségtelen.

2.2.2. tétel. ([LP]) *A 3- és 4-fogantyúk uniójának (mely tehát $\#mS^1 \times D^3$ -mal diffeomorf) határán értelmezett minden diffeomorfizmus kiterjed a 4-sokaságra.* \square

Ily módon tehát a 3- és 4-fogantyúkat tetszőlegesen odaragasztva ugyanazt a 4-sokaságot kapjuk; következésképp rajzunkban csak azt kell feljegyezni, hogy a megfelelő fogantyúkat odaragasztottuk-e vagy sem. Az így kapott diagramot az X 4-sokaság *Kirby diagramjának* nevezzük. Egy $(X, \partial X)$ relatív fogantyú-felbontás Kirby diagramját, illetve egy fogantyú-csúsztatás (ill. elhagyható párok bevezetése/elhagyása) Kirby diagramokra gyakorolt hatását a 6. előadásban fogjuk tárgyalni. Előtte azonban néhány, speciálisan 4-dimenziós sokaságokra vonatkozó definícióval és tétellel fogunk megismerkedni. A 2.2 ábra példát mutat egy Kirby diagramra.

2.2.3. megjegyzés. A fentiekben csak irányítható és zárt sokaságokkal foglalkoztunk. A nem-irányítható eset hasonlóan intézhető el — pusztán az 1-fogantyúk tüskézésére kell egy új szimbólumot bevezetnünk, lásd például [A]. Amennyiben a sokaság nem zárt (vagyis $\partial X \neq \emptyset$), a 0-, 1- és 2-fogantyúk ábrázolása a fent leírt módon történik; a 2.2.2 tétel azonban felteszi, hogy a 4-sokaság zárt. Belátható [Tr], hogy ha X egyszeresen összefüggő és ∂X összefüggő, akkor a 3-fogantyúk ragasztása egyértelmű — következésképp ez utóbbi esetekben megtarthatjuk korábbi konvencióinkat. Nem egyszeresen összefüggő határos X esetében azonban a 3-fogantyúk ragasztási gömbjeinek változtatása megváltoztathatja X diffeomorfizmus-típusát is — erre az esetre nincs kidolgozott szimbólum-rendszer.

3. előadás

Szimmetrikus formák

3.1 4-sokaságok kohomológiái

Legyen X egy zárt, irányított, topologikus 4-sokaság. Definiáljuk a $Q_X: H^2(X; \mathbb{Z}) \times H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ bilineáris függvényt a következő formulával: $Q_X(a, b) = \langle a \cup b, [X] \rangle$. Az ily módon $H^2(X; \mathbb{Z})$ -n értelmezett szimmetrikus bilineáris formát az X sokaság *metszetformájának* nevezzük. (Az elnevezés okára később még visszatérünk.) A Q_X forma az X 4-sokaság egyik legfontosabb invariánsa, hiszen pl. az egyszerűen összefüggő esetben meghatározza a $H^*(X; \mathbb{Z})$ kohomológia-gyűrűt, sőt X homotópia és (lényegében) homeomorfia típusát is.

3.1.1. megjegyzés. A Q_X forma definíciója kiterjeszthető peremes és nyílt sokaságokra is (relatív illetve kompakt tartójú kohomológiákat alkalmazva), és a nem-irányítható esetre is, amikor pedig \mathbb{Z}_2 -együtthatókat kell választani. A továbbiakban jobbra zárt, irányítható (a legtöbb esetben egyszerűen összefüggő) sokaságokkal fogunk foglalkozni.

3.1.2. feladat. Legyen G egy végesen prezentált csoport. Találjunk olyan sima 4-dimenziós zárt (irányított) 4-sokaságot, melyre $\pi_1(X) \cong G$.

Mivel csoportok izomorfizmusa algoritmussal el nem dönthető probléma, a továbbiakban (a fenti feladat állításából eredő komplikációk elkerülése végett) tegyük fel, hogy $\pi_1(X) = 1$. Legyen tehát X egyszerűen összefüggő, zárt, irányított 4-sokaság. Mivel $H^1(X; \mathbb{Z}) = H_1(X; \mathbb{Z}) = H^3(X; \mathbb{Z}) = H_3(X; \mathbb{Z}) = 0$ és $H^0(X; \mathbb{Z}) = H_4(X; \mathbb{Z}) = H^4(X; \mathbb{Z}) = H_0(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, X kohomológiáját $H^2(X; \mathbb{Z}) \cong H_2(X; \mathbb{Z})$ határozza meg; a gyűrűstruktúra éppen Q_X -szel adható meg.

3.1.3. lemma. A $H^2(X; \mathbb{Z})$ kohomológia csoport egy $\{a_1, \dots, a_n\}$ bázisát rögzítve a $B = [Q_X(a_i, a_j)]_{ij}$ mátrix determinánsa ± 1 .

Bizonyítás. Legyen $\alpha_i \in H_2(X; \mathbb{Z})$ a fenti bázis (algebrai) duálisa (vagyis $\alpha_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$), és legyen $\beta_i = PD(a_i)$ az a_i elem Poincaré duálisa. Könnyen látható, hogy az $\{\alpha_i\} \rightarrow \{\beta_i\}$ bázistranszformáció mátrixa éppen B ; mivel egy bázistranszformáció \mathbb{Z} felett invertálható, $\det B = \pm 1$ adódik. \square

Jelölje \bar{X} az X 4-sokaságot az adott ellentétes irányítással ellátva. A definíció alapján könnyen látható, hogy $Q_{\bar{X}} = -Q_X$. A szimmetrikus formáknak a 4-dimenziós topológiában játszott fontos szerepe miatt a fejezet hátralevő részét szimmetrikus formák tárgyalásának szenteljük, és csak a következő fejezetben térünk vissza a 4-dimenziós sokaságok témaköréhez.

3.1.4. definíció. Egy Q szimmetrikus, bilineáris, egész értékű formát egy A szabad Abel csoporton *unimodulárisnak* nevezzük, ha determinánsa egy bázisban ± 1 . (Mivel egy A szabad Abel csoport bázistranszformációjának determinánsa ± 1 , és Q egy M mátrixát a C bázistranszformáció $M \mapsto C^T M C$ szerint transzformálja, így $\det Q$ bázisválasztástól függetlenül jóldefiniált.)

Legyen $x \in A$ -ra $L_x: A \rightarrow \mathbb{Z}$ az $L_x(y) = Q(x, y)$ formulával definiált homomorfizmus; ily módon egy $L: A \rightarrow A^* = \text{Hom}(A; \mathbb{Z})$ leképezést kapunk.

3.1.5. lemma. Q pontosan akkor unimoduláris, ha L izomorfizmus.

Bizonyítás. Legyen $\{a_1, \dots, a_n\}$ A -nak egy bázisa, és vegyük az $\{a_1^*, \dots, a_n^*\} \subset A^*$ duális bázist, amelyre tehát $a_i^*(a_j) = \delta_{ij}$. Könnyen látható, hogy L mátrixa éppen $[Q(a_i, a_j)]_{ij}$ lesz; mivel L pontosan akkor izomorfizmus, ha mátrixa invertálható, a lemma adódik. \square

3.2 Szimmetrikus unimoduláris formák osztályozása

Tegyük fel, hogy Q egy, az A szabad Abel csoporton megadott szimmetrikus bilineáris forma.

3.2.1. definíció. A Q forma $rk(Q)$ rangja az A csoport rangja. Terjesszük ki Q -t az $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ vektortérre lineárisan, és írjuk fel diagonális alakban (ilyen bázis mindig létezik). A főátlóban lévő 1-ek száma legyen $b^+(Q)$, a (-1) -eké pedig $b^-(Q)$. A $\sigma(Q) = b^+(Q) - b^-(Q)$ különbséget a Q forma *szignatúrájának* hívjuk. Nevezzük Q -t *párosnak*, ha $Q(a, a)$ minden $a \in A$ esetén páros, és *páratlannak* egyébként. A Q formát *pozitív (negatív) definitnek* hívjuk, ha $rk(Q) = \sigma(Q)$ ($rk(Q) = -\sigma(Q)$). Ha Q_i adott formák A_i -n ($i = 1, 2$), akkor a $Q = Q_1 \oplus Q_2$ formát $A_1 \oplus A_2$ -n a következő formula adja meg: $Q(a, b) = Q_1(a_1, b_1) + Q_2(a_2, b_2)$ ahol $a_i, b_i \in A_i$. Egy $k > 0$ egész esetén kQ -t Q önmagával vett k -szoros direkt összegeként értelmezzük; $k < 0$ -ra $kQ = |k|(-Q)$. (A $k = 0$ esetben kQ definíció szerint a 0 forma a triviális Abel csoporton.) A Q_1 és Q_2 , A -n értelmezett formák ekvivalensek, ha létezik olyan $\varphi \in \text{Aut}(A)$ melyre $Q_1(a, b) = Q_2(\varphi(a), \varphi(b))$. Ez pontosan akkor fordul elő, ha léteznek olyan bázisok, melyekben Q_1 és Q_2 mátrixai megegyeznek.

Definit formákat meglehetősen nehéz osztályozni; ismert például, hogy 40 rangú definit unimoduláris formából legalább 10^{50} különböző (nem-ekvivalens) van. Az indefinit eset — amit most tárgyalni fogunk — azonban sokkal egyszerűbb; mint látni fogjuk, a 4-dimenziós sokaságok szempontjából (szerencsés módon) éppen az indefinit formák fontosak.

3.2.2. tétel. A Q_1 és Q_2 indefinit, unimoduláris, szimmetrikus bilineáris formák pontosan akkor ekvivalensek, ha $rk(Q_1) = rk(Q_2)$, $\sigma(Q_1) = \sigma(Q_2)$ és Q_1, Q_2 paritása megegyezik.

A fenti tétel bizonyításához a következő — bonyolult algebrai geometriát igénylő — tételt fogjuk felhasználni (lásd [MH]):

3.2.3. tétel. Ha Q indefinit és $A \neq 0$, akkor létezik olyan $a \neq 0$ elem A -ban melyre $Q(a, a) = 0$. \square

Jelölje H a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal reprezentált formát. Ekkor

3.2.4. lemma. Ha a Q indefinit forma szignatúrája 0, akkor Q vagy az $n\langle 1 \rangle \oplus n\langle -1 \rangle$ vagy az lH formával ekvivalens.

Bizonyítás. Legyen $a \in A - \{0\}$ olyan, hogy $Q(a, a) = 0$; tegyük fel továbbá, hogy ha $a = da'$, akkor $d = \pm 1$. (Az ilyen elemeket *primitív* elemeknek szokás nevezni.) Ekkor létezik olyan $b \in A$, melyre $Q(a, b) = 1$, és könnyen belátható, hogy az $\langle a, b \rangle$ altér merőlegesén Q továbbra is unimoduláris.

3.2.5. feladat. Lássuk be, hogy $Q|_{\langle a, b \rangle} \cong \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle$ ha $Q(b, b)$ páratlan, és $Q|_{\langle a, b \rangle} \cong H$ ha $Q(b, b)$ páros.

Vegyük észre, hogy mivel H és $\langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle$ szignatúrája 0, Q -t az $\langle a, b \rangle^\perp$ altérre megszorítva továbbra is 0 szignatúrájú formával van dolgunk. Indukciót alkalmazva tehát Q -t $n_1 H \oplus n_2(\langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle)$ alakban bontottuk fel. Amennyiben $n_1 = 0$ vagy $n_2 = 0$, éppen a lemma által kívánt felbontást kaptuk. A következő lemma már befejezi a 3.2.4 lemma bizonyítását. \square

3.2.6. lemma. $H \oplus \langle -1 \rangle \cong 2\langle -1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle$, így $H \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle \cong 2(\langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Q mátrixa az $\{a, b, c\}$ bázisban $H \oplus \langle -1 \rangle$. A formát az $\{a - c, b - c, a + b - c\}$ új bázisban felírva $2\langle -1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle$ adódik, ami bizonyítja a fenti lemmát. \square

Térjünk most vissza a 3.2.2 tétel bizonyítására. Tegyük fel, hogy $\sigma(Q_1) = \sigma(Q_2) > 0$ és alkalmazzunk $\sigma(Q)$ szerinti indukciót. (A negatív szignatúrájú eset analóg módon intézhető el, úgyhogy arra nem fogunk külön kitérni.) Legyen tehát $Q = Q_1 \oplus \langle -1 \rangle$; vegyük észre, hogy $Q_2 \oplus \langle -1 \rangle$ azonos rangú és szignatúrájú, szintén páratlan forma. Következésképp — indukció szerint — $Q \cong Q_2 \oplus \langle -1 \rangle$. Tegyük fel, hogy Q_i az A_i Abel csoporton értelmezett forma ($i = 1, 2$); így Q -t az $A = A_1 \oplus \langle x \rangle \cong A_2 \oplus \langle y \rangle$ eggyel nagyobb rangú csoporton definiáltuk. A fenti definíció szerint $Q(x, x) = Q(y, y) = -1$.

3.2.7. definíció. Egy $a \in A$ elem *karakterisztikus* ha minden $b \in A$ -ra $Q(a, b) \equiv Q(b, b) \pmod{2}$. Vegyük észre, hogy Q pontosan akkor páros, ha $0 \in A$ karakterisztikus.

A fenti konstrukcióban tehát x (illetve y) pontosan akkor karakterisztikus ha Q_1 (ill. Q_2) páros, hiszen $Q(x, q) = 0$ minden $q \in \langle x \rangle^\perp$ -re. Ily módon tehát — mivel Q_1 és Q_2 paritása megegyezik — x és y egyszerre karakterisztikusak. A következő tétel szerint ebből az következik, hogy a Q formának létezik egy x -et y -ba, így Q_1 -et Q_2 -be vivő automorfizmusa, mely a tételt már bizonyítja.

3.2.8. tétel. (Wall, [W1]) *Legyen Q unimoduláris forma A -n és tegyük fel, hogy $x, y \in A$ -ra $Q(x, x) = Q(y, y) = -1$. Ha x és y karakterisztikusak, akkor létezik egy $\varphi \in \text{Aut}(A, Q)$ automorfizmus, melyre $\varphi(x) = y$. Hasonló φ létezik akkor is ha sem x sem y nem karakterisztikus.* \square

Evvel a 3.2.2 tétel bizonyítását befejeztük. \square

3.3 Néhány unimoduláris forma

Egy Q unimoduláris formára (a $b_+(Q) + b_-(Q) = rk(Q)$ és $b_+(Q) - b_-(Q) = \sigma(Q)$ azonosságok miatt) $|\sigma(Q)| \leq rk(Q)$ és $\sigma(Q) \equiv rk(Q) \pmod{2}$ mindig teljesül. Legyen Q páratlan indefinit, és vegyük a $Q' = \frac{1}{2}(rk(Q) + \sigma(Q))\langle 1 \rangle \oplus \frac{1}{2}(rk(Q) - \sigma(Q))\langle -1 \rangle$ formát. Könnyen látható, hogy Q' rangja, szignatúrája és paritása megegyezik Q -ével, így a 3.2.2 tétel értelmében ekvivalens Q -val.

3.3.1. következmény. $A (rk(Q), \sigma(Q)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ pár egy páratlan indefinit Q forma teljes invariáns rendszerét alkotja. Továbbá, ha $|\sigma| < rk$ és $rk \equiv \sigma \pmod{2}$, akkor létezik az előírt (rk, σ) invariánsokkal rendelkező (páratlan, indefinit) unimoduláris forma. \square

A fenti két reláció természetesen páros formákra is áll. Ebben az esetben azonban egy további oszthatósági reláció is teljesül:

3.3.2. lemma. *Legyen Q tetszőleges unimoduláris forma és x egy karakterisztikus elem. Ekkor $\sigma(Q) \equiv Q(x, x) \pmod{8}$. Ily módon, ha Q páros, akkor $\sigma(Q)$ osztható nyolccal.*

Bizonyítás. Vegyük a $Q \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle$ formát. Mivel ez indefinit és páratlan, a 3.3.1 következmény alapján $Q \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle \cong (b_+(Q) + 1)\langle 1 \rangle \oplus (b_-(Q) + 1)\langle -1 \rangle$. Tegyük fel, hogy a $Q \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle$ felbontásban lévő $\langle 1 \rangle$ részt e_+ , a $\langle -1 \rangle$ részt pedig e_- generálja. Könnyen látható, hogy $x + e_+ + e_-$ karakterisztikus elem $Q \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle$ -re nézve (mivel x karakterisztikus volt Q -ra nézve). Abban az $\{a_1, \dots, a_n\}$ bázisban, melyben $Q \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle$ diagonális alakú, $x + e_+ + e_-$ minden együtthatója páratlan, hiszen $Q(x + e_+ + e_-, a_i) \equiv Q(a_i, a_i) = \pm 1$. Ily módon $x + e_+ + e_- = \sum \alpha_i a_i + \sum \beta_j a_j$, tehát $Q(x + e_+ + e_-, x + e_+ + e_-) = \sum_{i=1}^{b_+(Q)+1} \alpha_i^2 - \sum_{i=1}^{b_-(Q)+1} \beta_i^2$, ahol az α_i -k és a β_j -k páratlanok. Mivel egy páratlan szám négyzete 1-gyel kongruens moduló 8, a fenti azonosság $Q(x, x) = Q(x + e_+ + e_-, x + e_+ + e_-) \equiv (b_+(Q) + 1) - (b_-(Q) + 1) = \sigma(Q) \pmod{8}$ kongruenciát adja, amivel a bizonyítás kész. Mivel Q pontosan akkor páros, ha $0 \in A$ karakterisztikus, a fenti kongruencia azt mutatja, hogy páros Q -ra $\sigma(Q)$ osztható 8-cal. \square

Legyen tehát $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ és

$$E_8 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

páros formák. Mivel $rk(H) = 2$, $\sigma(H) = 0$, $rk(E_8) = 8$ és $\sigma(E_8) = 8$, a következő állítás könnyen következik.

3.3.3. állítás. *Tegyük fel, hogy egy $(rk, \sigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ számpárra $|\sigma| < rk$, $\sigma \equiv rk \pmod{2}$ és $\sigma \equiv 0 \pmod{8}$ teljesül. Ekkor létezik (pontosan egy) olyan Q páros unimoduláris forma, melyre $rk(Q) = rk$ és $\sigma(Q) = \sigma$. A fentiek értelmében minden indefinit páros formára teljesülnek a fenti relációk.*

Bizonyítás. Adott (fenti tulajdonságokkal bíró) (rk, σ) esetén vegyük a $\frac{\sigma}{8}E_8 \oplus \frac{rk-|\sigma|}{2}H$ páros formát. Az állítást könnyű számolás és a fenti tételek alkalmazása adja. \square

Összefoglalva tehát, egy Q unimoduláris (szimmetrikus, bilineáris) forma vagy definit (és ekkor nincs jó leírásunk), vagy indefinit, amikor is (paritásától függően) $n\langle 1 \rangle \oplus m\langle -1 \rangle$ vagy $aE_8 \oplus bH$ alakú.

3.3.4. megjegyzés. A fenti E_8 formát az E_8 kivételes Lie-algebra Cartan mátrixából származtattuk — ez a leírás magyarázza az elnevezést.

4. előadás

Nevezetes tételek 4-sokaságokra

4.1 4-sokaságok homotópia és homeomorfia típusai

Mint azt már korábban láttuk, egy egyszeresen összefüggő (topologikus) 4-sokaság (ko)homológia-gyűrűjét a Q metszetforma egyértelműen meghatározza. Ha az X sokaság zárt és irányított, akkor (a Poincaré-dualitás miatt) a Q_X metszetforma egy szimmetrikus, bilineáris, unimoduláris forma. A következőkben a metszetforma és a sokaság homotópia-típusa, később a homeomorfizmus- majd diffeomorfizmus-osztálya közötti kapcsolatot vizsgáljuk meg.

4.1.1. tétel. *Az X_1 és X_2 egyszeresen összefüggő topologikus 4-sokaságok pontosan akkor homotóp ekvivalensek, ha metszetformáik izomorfak.*

A fenti tétel bizonyítását a következő fejezetben adjuk meg. A 4.1.1 tétel finomításának tekinthető a következő, M. Freedmantól származó eredmény.

4.1.2. tétel. (Freedman, [F]) *Minden Q szimmetrikus, bilineáris, unimoduláris formára létezik olyan X egyszeresen összefüggő topologikus négysokaság, melyre $Q_X \cong Q$. Ha Q páros, akkor a fenti X homeomorfizmus erejéig egyértelmű. Páratlan Q esetén pontosan két, nem-homeomorf fenti tulajdonságú 4-sokaság létezik; ezek közül legfeljebb az egyik látható el sima struktúrával.* \square

E tétel bizonyítása meglehetősen bonyolult; a későbbiekben röviden vázolni fogjuk a bizonyítás menetét. A fenti két tétel szerint tehát páros metszetformájú topologikus 4-sokaságok pontosan akkor homeomorfak, ha homotóp ekvivalensek, valamint két sima egyszeresen összefüggő 4-sokaság pontosan akkor homeomorf ha homotóp ekvivalens. A 4.1.2 tétel egy speciális esete (az ún. *topologikus 4-dimenziós Poincaré sejtés*) kiemelését érdemel:

4.1.3. következmény. *Ha az X topologikus 4-sokaság homotóp ekvivalens az S^4 4-dimenziós gömbbel, akkor homeomorf is vele.* \square

Tegyük most fel, hogy X egyszeresen összefüggő sima 4-sokaság; a fenti tétel értelmében X topológiáját Q_X egyértelműen meghatározza. Az azonban nem világos, milyen Q szimmetrikus bilineáris forma fordul elő mint egy *sima* 4-sokaság metszetformája, illetve hogy Q_X meghatározza-e X -et diffeomorfizmus erejéig is. A következőkben ezekre a kérdésekre adunk majd (részleges) választ.

4.1.4. tétel. (Donaldson, [D1]) *Ha X sima egyszeresen összefüggő 4-sokaság és Q_X negatív definit, akkor $Q_X \cong n\langle -1 \rangle$. Hasonlóan, pozitív definit Q_X esetén $Q_X \cong n\langle 1 \rangle$.* \square

Emlékezzünk vissza, hogy definit metszetformákra nem tudtunk egyszerű osztályozási sémát találni (szemben az indefinitekkel, melyeket rangjuk, szignatúrájuk és paritásuk meghatározott). A fenti tétel értelmében *sima* 4-sokaságok szempontjából csak a legegyszerűbb, úgynevezett *diagonális* definit metszetformák ($\pm n\langle 1 \rangle$) érdekesek. A továbbiakban szorítkozzunk ismét indefinit metszetformákra.

4.1.5. tétel. (Rohlin, [R]) *Ha X sima egyszeresen összefüggő 4-sokaság és Q_X páros, akkor $\sigma(X) \equiv 0 \pmod{16}$, vagyis $Q_X \cong 2kE_8 \oplus lH$ ($k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$).* \square

4.1.6. megjegyzés. A fenti tétel általánosítható nem egyszeresen összefüggő 4-sokaságokra is; az általános tétel a következőképpen szól: Tegyük fel, hogy X sima spin 4-sokaság. Ekkor 16 osztja $\sigma(X)$ -et. (Spin sokaságokról a későbbiekben még lesz szó.)

4.1.7. tétel. (Furuta, [Fu]) *Ha X egyszeresen összefüggő sima 4-sokaság és Q_X páros (tehát $Q_X \cong 2kE_8 \oplus lH$), akkor $l \geq 2|k| + 1$.* \square

A fenti három tétel szerint tehát egy sima egyszeresen összefüggő 4-sokaság metszetformája $n\langle 1 \rangle \oplus m\langle -1 \rangle$ vagy $2kE_8 \oplus lH$ ($l \geq 2|k| + 1$) alakú lehet. Mint azt később látni fogjuk, a fenti páratlan, és $l \geq 3|k|$ esetén a páros metszetformák elő is fordulnak mint sima 4-sokaságok metszetformái. A következő sejtés bizonyítása így megválaszolná azt a kérdést, hogy mely formák állnak elő sima 4-sokaságok metszetformájaként.

4.1.8. sejtés. ($\frac{11}{8}$ -sejtés) *Ha X sima egyszeresen összefüggő és Q_X páros, akkor $l \geq 3|k|$.*

Későbbi előadásokban a 4.1.2 és a 4.1.4 tételek bizonyításának fő gondolataival fogunk megismerkedni. Hasonló technikák segítségével látható be, hogy majdnem minden olyan topologikus 4-sokaság, melyre van sima struktúra, végtelen sokféle képpen simítható ki. Például

4.1.9. tétel. *Rögzített k és N esetén a $2kE_8 \oplus (4k-1)H$ ($k \geq 1$) és a $(2k-1)\langle 1 \rangle \oplus N\langle -1 \rangle$ ($k \geq 1$, $N \geq 10k-1$) metszetformákhoz tartozó topologikus 4-sokaságok végtelen sok, páronként nem diffeomorf sima 4-sokasággal homeomorfak.* \square

4.2 A 4.1.1 tétel bizonyítása

Az előadás hátralévő részében a 4.1.1 tétel bizonyítását adjuk meg.

4.2.1. definíció. Legyen X véges (4-dimenziós) CW-komplexus és $[X] \in H_4(X; \mathbb{Z})$ egy rögzített homológiaosztály. Az $(X, [X])$ párt *Poincaré dualitási térnek* nevezzük, ha az $\alpha \mapsto \alpha \cap [X]$ leképezés egy $H^i(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{4-i}(X; \mathbb{Z})$ izomorfizmust ad meg. Vegyük észre, hogy ha X Poincaré dualitási tér, akkor a metszetforma korábbi definíciója minden módosítás nélkül alkalmazható, így a Q_X (szimmetrikus, bilineáris, unimoduláris) metszetforma definiált.

4.2.2. tétel. (Whitehead) X_1, X_2 *egyszeresen összefüggő 4-dimenziós Poincaré dualitási terek pontosan akkor homotóp ekvivalensek, ha $Q_{X_1} \cong Q_{X_2}$. Minden Q unimoduláris, szimmetrikus bilineáris formára létezik olyan X Poincaré dualitási tér, melyre $Q_X \cong Q$.*

A fenti tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány lemmára.

4.2.3. lemma. *Adott X Poincaré dualitási térre létezik egy olyan $f: S^3 \rightarrow \bigvee_{i=1}^k S_i$ leképezés, hogy X és a $\bigvee_{i=1}^k S_i^2 \cup_f D^4$ CW-komplexus homotóp ekvivalensek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\{e_i \mid i = 1, \dots, k\}$ egy bázisa $H_2(X; \mathbb{Z})$ -nek. Mivel X egyszeresen összefüggő, a Hurewicz-tétel szerint $\pi_2(X) \cong H_2(X; \mathbb{Z})$, vagyis minden i -re létezik egy olyan $\phi_i: (S^2, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ leképezés, melyre $(\phi_i)_*([S^2]) = e_i$. Ezekből a ϕ_i -kből tehát egy $\phi: W = \bigvee_{i=1}^k S_i^2 \rightarrow X$ leképezés áll össze. Mivel a fenti konstrukció szerint $i < 4$ -re $H_i(X, \phi(W); \mathbb{Z}) = 0$ és $H_4(X, \phi(W); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, a relatív Hurewicz-tétel miatt $H_4(X, \phi(W); \mathbb{Z}) = \pi_4(X, \phi(W))$. Eszerint léteznek $f: S^3 \rightarrow W$ és $F: D^4 \rightarrow X$ függvények úgy, hogy $F|_{S^3} = \phi \circ f$ és $(F, f)_*: H_4(D^4, S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H_4(X, \phi(W); \mathbb{Z})$ izomorfizmus. Legyen $Y = \bigvee_{i=1}^k S_i^2 \cup_f D^4$ és $g = \phi \cup F: Y \rightarrow X$. A fentiek szerint g_* izomorfizmust ad meg a homológiák között, vagyis g_* gyenge homotóp ekvivalencia. Mivel X és Y CW-komplexusok, a lemma bizonyítása következik. \square

Követve a bizonyításban használt konvenciót, jelölje W a $\bigvee_{i=1}^k S_i$ csokrot. Könnyen látható, hogy ha f_1 és f_2 homotóp $S^3 \rightarrow W$ függvények, akkor $W \cup_{f_1} D^4$ és $W \cup_{f_2} D^4$ homotóp ekvivalensek. Következésképp

a homotópikus osztályozás szempontjából a $\pi_3(W)$ csoportot kell megvizsgálnunk. Jelölje $M(k \times k)$ a $k \times k$ -as egész értékű szimmetrikus mátrixok additív csoportját. Rögzítsünk $x_i \in S_i^2$ pontokat és tegyük fel, hogy az $f: S^3 \rightarrow W$ függvény transzverzális az $x_i \in S_i^2$ pontokra, és sima $f^{-1}(x_i)$ egy környezetében. (Könnyen látható, hogy minden $[f] \in \pi_3(W)$ homotópia-osztályban található ilyen függvény.) Legyen $L_i = f^{-1}(x_i) \subset S^3$, és definiáljuk a $\lambda_{ij}(f)$ számot mint az L_i és L_j láncok $\ell k(L_i, L_j)$ hurkolódási számát. (Az $i = j$ esetben vegyünk egy x'_i , az előbbi x_i -hez közeli pontot, és definiáljuk $\lambda_{ii}(f)$ -et mint az $\ell k(f^{-1}(x_i), f^{-1}(x'_i))$ hurkolódási számot.) Könnyen belátható, hogy a fenti módon f -hez rendelt $[\lambda_{ij}(f)] \in M(k \times k)$ mátrix csak az $[f] \in \pi_3(W)$ homotópia-osztálytól függ.

4.2.4. lemma. *A fent definiált $L: \pi_3(W) \rightarrow M(k \times k)$ függvény egy csoportizomorfizmus.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $[f] = [f_1] + [f_2]$ a $\pi_3(W)$ csoportban. Reprerentáljuk $[f]$ -et az S^3 egyenlítőjét a bázispontba vivő, a felső félgömbön f_1 -gyel, az alsón pedig f_2 -vel egyenlő f leképezéssel. Mivel $f^{-1}(x_i) = f_1^{-1}(x_i) \cup f_2^{-1}(x_i)$ (vegyük észre, hogy az L_i inverz képekről nem tettük fel, hogy összefüggők), a fenti L leképezés csoporthomomorfizmus. A $h: S^3 \rightarrow S_i^2$ Hopf-leképezés mutatja, hogy az E_{ii} mátrix (melynek minden eleme 0 kivéve az i -edik sor i -edik elemét, mely 1) az L leképezés képében van. Hasonlóan, ha $h': S^3 \rightarrow S^2 \vee S^2$ adja meg a 4-cellát ragasztó leképezést $S^2 \times S^2$ kézenfekvő cella-felbontásában, és $S^2 \vee S^2$ -t azonosítjuk $S_i^2 \vee S_j^2 \subset W$ -vel, akkor $L([h']) = E_{ij} + E_{ji}$ adódik. Mivel ezek a mátrixok generálják $M(k \times k)$ -t, az L homomorfizmus ráképezés.

4.2.5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $L([f]) = 0 \in M(k \times k)$, akkor $[f] = 0$ a $\pi_3(W)$ csoportban.

A feladat megoldása bizonyítja a lemmát. □

Legyen tehát $X = W \cup_f D^4$, és jelölje $e_i \in H_2(X; \mathbb{Z})$ az i -edik W -beli S_i^2 gömb homológia-osztályát. Legyen $\{e_i^* \mid i = 1, \dots, k\} \subset H^2(X; \mathbb{Z})$ a megfelelő duális bázis.

4.2.6. tétel. *Az $L(f)$ mátrix az X 4-sokaság metszetformáját adja meg; pontosabban, $\lambda_{ij}(f) = \langle e_i^* \cup e_j^*, [X] \rangle$.*

Bizonyítás. Legyen $Z_i \subset D^4$ olyan 2-dimenziós felület, melyre $\partial Z_i = L_i \subset S^3$. (Ilyen felület minden $L \subset S^3$ láncra létezik — egy ilyen L Seifert-felületének nevezünk.) A $\lambda_{ij}(f)$ számok definíció szerint megegyeznek a $Z_i \cap Z_j$ metszetben lévő pontok előjeles összegével. (Feltehetjük, hogy a Z_i felületek transzverzálisan metszik egymást.) Mivel a $Z_i \cup \{x_i\}$ 2-ciklus az $e_i \in H_2(X; \mathbb{Z})$ elemet reprezentálja és $\langle e_i^* \cup e_j^*, [X] \rangle = (Z_i \cup \{x_i\}) \cap (Z_j \cup \{x_j\}) = Z_i \cap Z_j$, a bizonyítás kész. (Lásd még az 5.1.3 lemmát.) □

4.2.7. következmény. *Ha Q egy unimoduláris, szimmetrikus, bilineáris forma, akkor létezik olyan X Poincaré dualitási tér, melyre $Q_X \cong Q$.*

Bizonyítás. Legyen $A \in M(k \times k)$ egy Q -t reprezentáló mátrix, és vegyük $L^{-1}(A) \in \pi_3(W)$ egy f reprezentánsát. (A W tér definíciójában szereplő k éppen Q rangjával legyen egyenlő.) A fenti f -fel D^4 -et W -hez ragasztva egy X Poincaré dualitási teret kapunk (itt használjuk ki Q unimodularitását), melyre a fentiek szerint $Q_X \cong Q$. □

4.2.8. tétel. *Tegyük fel, hogy X és Y egyszeresen összefüggő Poincaré dualitási terek és $\alpha: H^2(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$ egy metszetforma-őrző izomorfizmus. Ekkor létezik $X \rightarrow Y$ homotópikus ekvivalencia, mely α -t indukálja.*

Bizonyítás. Legyen $k = rk H_2(X; \mathbb{Z}) = rk H_2(Y; \mathbb{Z})$, és jelölje (mint eddig) W a $\bigvee_{i=1}^k S_i^2$ csokrot. Az eddigiek szerint feltehető, hogy $X = W \cup_f D^4$ valamely $f: S^3 \rightarrow W$ leképezésre. Legyen $e_i = (\phi_i)_*[S_i^2] \in H_2(X; \mathbb{Z})$, és jelöljük e'_i -vel ($e'_i \in H_2(Y; \mathbb{Z})$) ennek $PD_Y \circ \alpha \circ PD_X^{-1}$ izomorfizmusnál vett képét. Az eddigieket Y -ra alkalmazva egy $\psi: W \rightarrow Y$ leképezést és egy $Y = W \cup_{f'} D^4$ cella-felbontást kapunk. Mivel α megőrzi a metszeformát, könnyen látható, hogy $L([f]) = L([f'])$, vagyis (L injektivitása miatt) f és f' homotópok. Eszerint a $\phi: W \rightarrow X$ leképezés egy $Y = W \cup_{f'} D^4 \rightarrow X$ homotópikus ekvivalenciává terjeszthető ki, mely éppen az α izomorfizmust indukálja a második kohomológia-csoportokon. □

A fenti tétel könnyen látható módon bizonyítja a 4.2.2 tételt. Mivel egy X topologikus 4-sokaság homotópicusan ekvivalens egy CW-komplexussal, az irányítás által definiált fundamentális osztályt választva $[X]$ -nek, X kanonikusan egy Poincaré dualitási térré tehető, következésképp a fenti tétel bizonyítja a 4.1.1 tételt. □

5. előadás

Példák 4-sokaságokra

5.1 Néhány egyszerű példa

Az $S^4 = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid \|x\| = 1\}$ 4-dimenziós gömbfelület a legegyszerűbb zárt, sima, egyszeresen összefüggő 4-sokaság; mivel $H_2(S^4; \mathbb{Z}) = 0$, metszetformájára $Q_{S^4} = \emptyset$ adódik. Némileg összetettebb a következő példa: hasson $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ a \mathbb{C}^3 3-dimenziós komplex vektortéren a $\lambda(z_1, z_2, z_3) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$ hatással. A $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^3 - \{0\}/\mathbb{C}^*$ faktorról könnyen látható, hogy egy zárt, egyszeresen összefüggő 4-sokaság. (Ez a tény például abból is látszik, hogy $\mathbb{C}^3 - \{0\}/\mathbb{C}^* = S^5/S^1$.) A fenti előállítás azonban azt mutatja, hogy a $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ komplex projektív sík *komplex sokaság*, és mint ilyen, kanonikusan irányítható.

5.1.1. megjegyzés. Az n -dimenziós komplex vektortér természetes irányítását kapjuk a következő módon: Legyen $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{C}^n$ bázis \mathbb{C} felett, ekkor a $\{v_1, iv_1, v_2, iv_2, \dots, v_n, iv_n\}$ halmaz a $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ vektortérnek egy \mathbb{R} feletti bázisa lesz, mely egy irányítást ad meg; ez az irányítás könnyen látható módon nem függ a választott komplex bázistól.

$\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ fenti definíciójához hasonlóan kapjuk a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^2 - \{0\}/\mathbb{C}^*$ komplex projektív egyenest (mely S^2 -vel diffeomorf); $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ pedig újabb példát ad egyszeresen összefüggő zárt 4-sokaságra. Mielőtt a fenti 4-sokaságok metszetformáját meghatároznánk, néhány tételt bizonyítunk metszetformákra.

5.1.2. lemma. *Tegyük fel, hogy X egy sima 4-sokaság és $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$. Ekkor létezik egy olyan Σ irányított, zárt, 2-dimenziós felület és $f: \Sigma \rightarrow X$ beágyazás, melyre $f_*([\Sigma]) = \alpha$.*

Bizonyítás. Legyen $a = PD(\alpha) \in H^2(X; \mathbb{Z})$ és vegyük azt az $L_a \rightarrow X$ komplex vonalnyalábot, melyre $c_1(L_a) = a$. Legyen σ ennek a nyalábnak egy generikus szelése; a $\sigma^{-1}(0)$ nullhelyek egy $\Sigma \subset X$ 2-dimenziós részsokaságot adnak, melyre könnyen látható, hogy $[\Sigma] = \alpha$ teljesül. \square

5.1.3. lemma. *Tegyük fel, hogy $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta$ irányított, beágyazott, transzverzális 2-dimenziós részsokaságok az X 4-sokaságban; legyen továbbá $a = PD[\Sigma_\alpha]$ és $b = [\Sigma_\beta]$. Ekkor $Q_X(a, b) = \#(\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta)$ (ahol a metszéspontok számát, az 1.3.1 megjegyzéshez hasonlóan, előjellel számoljuk).*

Bizonyítás (vázlat). Reprezentáljuk a -t (illetve b -t) egy olyan η_1 (ill. η_2) 2-formával, melynek tartója Σ_α (ill. Σ_β) kis környezetében van, és ha (x, y, u, v) egy térkép a $p \in \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ metszéspont körül, akkor alkalmas f függvényre (melynek integrálja 1 és az origó $\in \mathbb{R}^2$ körül lokalizálódik) $\eta_1 = f(x, y)dx \wedge dy$ és $\eta_2 = f(u, v)du \wedge dv$. Mivel $Q_X(a, b) = \int_X \eta_1 \wedge \eta_2$, a lemma következik. \square

Ez utóbbi lemma magyarázza, miért nevezzük a Q_X bilineáris formát *metszetformának*.

5.1.4. feladatok. (a) Lássuk be, hogy $Q_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} = \langle 1 \rangle$ és $Q_{\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}} = \langle -1 \rangle$ (itt $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ jelöli a $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ 4-sokaságot a kanonikussal ellentétes irányítással ellátva).

- (b) Bizonyítsuk be, hogy $Q_{S^2 \times S^2} = H$. (Ötlet: A Künneth-formula segítségével lássuk be, hogy $H_2(S^2 \times S^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ és $S^2 \times \{\text{pt.}\}, \{\text{pt.}\} \times S^2$ beágyazott gömbök egy bázist határoznak meg. Számítsuk ki $Q_{S^2 \times S^2}$ -t ebben a bázisban.)

Tegyük fel, hogy $U_i \subset \partial X_i$ ($i = 1, 2$) kompakt részsokaságok, $\dim U_i = \dim \partial X_i$ és $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ irányítás-fordító diffeomorfizmus; ekkor (a keletkező sarkok lekerékítése után) egy $X_1 \cup_{U_2=\varphi(U_1)} X_2$ sima sokaságot készíthetünk. Ha $U_1 \cong D^3$ és a ∂X_i határok összefüggők, akkor a fenti konstrukció eredménye nem függ φ -től; ekkor X_1 és X_2 *határösszegét*, $X_1 \natural X_2$ -t kapjuk.

5.1.5. definíció. Legyen $D_i^4 \subset X_i^4$ beágyazott golyó, $\varphi: D_1 \rightarrow D_2$ pedig irányítás-fordító diffeomorfizmus. Ekkor az $X_1 \# X_2 = (X_1 - \text{int } D_1) \cup_{\varphi|_{\partial D_1}} (X_2 - \text{int } D_2)$ sokaságot X_1 és X_2 *összefüggő összegének* nevezzük. Ha X_i összefüggő, akkor a $D_i \subset X_i$ beágyazás lényegében egyértelmű, így ekkor (mint azt a jelölés is érzékelteti) az $X_1 \# X_2$ sokaság nem függ a választásoktól. Vegyük észre, hogy $\partial(X_1 \natural X_2) = \partial X_1 \# \partial X_2$.

5.2 4-sokaságok metszetformái

5.2.1. tétel. 4-sokaságok összefüggő összegére a metszetformák összeadódnak, vagyis $Q_{X_1 \# X_2} = Q_{X_1} \oplus Q_{X_2}$.

Bizonyítás. Legyenek $\Sigma_1^i, \dots, \Sigma_{n_i}^i \subset X_i$ beágyazott felületek, melyekre $[\Sigma_1^i], \dots, [\Sigma_{n_i}^i]$ a $H_2(X_i; \mathbb{Z})$ homológia-csoport egy bázisa ($i = 1, 2$). Feltehető, hogy $D_i \cap \Sigma_j^i = \emptyset$, így $\Sigma_j^i \subset X_1 \# X_2$. Könnyen látható, hogy a $[\Sigma_1^1], \dots, [\Sigma_{n_1}^1], [\Sigma_1^2], \dots, [\Sigma_{n_2}^2]$ bázisban a $Q_{X_1 \# X_2}$ metszetforma mátrixa éppen $Q_{X_1} \oplus Q_{X_2}$; evvel a tétel bizonyítása kész. \square

5.2.2. következmény. Az $\#n\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# m\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ 4-sokaság metszetformája $n\langle 1 \rangle \oplus m\langle -1 \rangle$, a $\#kS^2 \times S^2$ négysokaságé pedig kH . \square

Vegyük észre, hogy a fenti metszetformák lefedik a lehetséges definit, páratlan indefinit, illetve 0 szignatúrájú páros metszetformákat. További példákat kapunk egyszerűen összefüggő zárt 4-sokaságokra a következő módon. Legyen

$$S_d = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \mid \sum z_i^d = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^3,$$

legyen továbbá $g \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^3; \mathbb{Z})$ a $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^3; \mathbb{Z})$ gyűrű generátora, $x = i^*g \in H^2(S_d; \mathbb{Z})$ pedig ennek megszorítása az $i: S_d \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ beágyazás mentén. Az implicit függvénytétel egyszerű alkalmazásával belátható, hogy S_d sima (sőt komplex) sokaság.

5.2.3. tétel. Az S_d komplex felület Chern-osztályaira $c_1(S_d) = (4-d)x$ és $c_2(S_d) = (d^2 - 4d + 6)x^2$ adódik, ebből pedig $c_2[S_d] = \chi(S_d) = (d^2 - 4d + 6)d$ és $c_1^2[S_d] = (4-d)^2d$ kapható meg.

Bizonyítás. Mivel $c(T\mathbb{C}\mathbb{P}^3|_{S_d}) = i^*c(T\mathbb{C}\mathbb{P}^3) = i^*(1+g)^4 = (1+x)^4$, a Whitney szorzat-formula alapján $c(TS_d) = c(T\mathbb{C}\mathbb{P}^3|_{S_d}) \cdot c(\nu S_d)^{-1}$; a $\nu S_d \rightarrow S_d$ normálnyaláb Chern-osztálya ismeretében tehát a tétel könnyen bizonyítható. Egyszerűen látható be, hogy $c_1(\nu S_d) = dx$: legyen S'_d egy olyan másik, S_d -t transzverzálisan metsző d -edfokú felület, mely egyben a $\nu S_d \rightarrow S_d$ normálnyaláb szelése is. Ekkor $c_1(\nu S_d) = e(S_d) = PD([S_d \cap S'_d]) \in H^2(S_d; \mathbb{Z})$; mivel pedig $[S'_d] = d[S_1] \in H_4(\mathbb{C}\mathbb{P}^3; \mathbb{Z})$ és $PD([S_1]) = g \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^3; \mathbb{Z})$, a $c_1(\nu S_d)$ Chern-osztály meghatározása egyszerű számolásra redukálódik. Ebből $c(\nu S_d)^{-1} = 1 - c_1(\nu S_d) + c_1^2(\nu S_d) = 1 - dx + d^2x^2$ adódik, amiből a tétel $(1 + 4x + 6x^2)(1 - dx + d^2x^2) = 1 + (4-d)x + (d^2 - 4d + 6)x^2$ miatt következik. Vegyük észre, hogy a fentiekből $\langle x^2, [S_d] \rangle = d$ is adódik: $\langle x^2, [S_d] \rangle = \langle g^2, i_*[S_d] \rangle = \langle g^2, di_*[S_1] \rangle = \langle g^2 \cdot dg, [\mathbb{C}\mathbb{P}^3] \rangle = d$. Ebből pedig $c_1^2[S_d]$ és $c_2[S_d]$ értéke adódik. \square

A Lefschetz-féle hipersík-tétel alkalmazásával belátható, hogy

5.2.4. állítás. Az $S_d \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ 4-sokaság egyszerűen összefüggő. \square

5.2.5. megjegyzés. A Lefschetz hipersík-tétel azt állítja, hogy ha $X \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ zárt, komplex n -dimenziós részsokaság, és $H \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ egy hipersík, akkor a $\pi_i(H \cap X) \rightarrow \pi_i(X)$ homomorfizmus $i \leq n-1$ esetén ráképezés (és $i < n-1$ -re izomorfizmus). A tétel Morse-elméleti bizonyítása az [M1] könyvben található meg. (Egy általános $y \in \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ pontra az $f(x) = \text{dist}(x, y)$ távolságfüggvény egy olyan Morse függvényt ad meg, mely megmutatja, hogy a $\pi_i(X, X \cap H)$ relatív homotópia-csoportok $i < n$ esetén eltűnnek; ebből a fenti állítás a pár hosszú egzakt homotópia-sorozatából adódik.) A Lefschetz-féle hipersík-tétel egyszerű (de nem triviális) alkalmazása bizonyítja az 5.2.4 állítást, lásd pl. [GS].

A következő tétel összefüggést mutat egy 4-dimenziós X sima sokaság szignatúrája és érintőnyalábjának első Pontrjagin-száma között.

5.2.6. tétel. (Hirzebruch szignatúra-tétele) *Egy X 4-sokaság $\sigma(X)$ szignatúrájára $\sigma(X) = (\frac{1}{3}p_1(X), [X])$.* \square

5.2.7. következmény. *Ha S egy komplex felület, akkor $c_1^2[S] = 3\sigma(S) + 2\chi(S)$.*

Bizonyítás. Mivel egy komplex 2-sokaságra $p_1(S) = c_1^2(S) - 2c_2(S)$ és $c_2[S] = \chi(S)$ teljesül, a fenti 5.2.6 tétel adja a bizonyítást. \square

5.2.8. tétel. *Az S_d komplex felület Q_{S_d} metszetformája páratlan d esetén a $\lambda_d\langle 1 \rangle \oplus \mu_d\langle -1 \rangle$, páros d esetén pedig az $l_d\langle -E_8 \rangle \oplus m_d H$ formákkal izomorf — itt $\lambda_d = m_d = \frac{1}{3}(d^3 - 6d^2 + 11d - 3)$, $\mu_d = \frac{1}{3}(d-1)(2d^2 - 4d + 3)$ és $l_d = \frac{1}{24}d(d^2 - 4)$.*

Bizonyítás. A fenti tételek ismeretében $\chi(S_d)$ és $\sigma(S_d)$ a $c_2[S_d]$ és $c_1^2[S_d]$ Chern-számokból könnyen adódnak. Az 5.2.9(a) feladat értelmében c_1 karakterisztikus elem, így $Q_{S_d}(a, a) \equiv Q_{S_d}(c_1(S_d), a) \pmod{2}$ minden $a \in H^2(S_d; \mathbb{Z})$ -re, ami 0-val kongruens, ha d páros (hiszen ekkor a $c_1(S_d) = (4-d)x$ egy kohomológia-osztály páros számszorosa); páratlan d -re $Q_{S_d}(x, x) = d$ miatt Q_{S_d} páratlan. A metszetformák klasszifikációja alapján a tétel bizonyítása innen elemi aritmetika. \square

Ebből adódóan $Q_{S_4} = -2E_8 \oplus 3H$, így $l \geq 3|k|$ és $k < 0$ esetén $\#kS_4\#(l-3|k|)S^2 \times S^2$ 4-sokaság metszetformája éppen $2kE_8 \oplus lH$. (Ha $k > 0$, akkor $\#\bar{S}_4\#(l-3|k|)S^2 \times S^2$ lesz a megfelelő választás, ahol \bar{S}_4 az S_4 sokaság a kanonikussal ellentétes irányítással ellátva.) Ily módon tehát minden, a $\frac{11}{8}$ -sejtés (4.1.8 sejtés) által megengedett metszetformára találtunk azt reprezentáló sima, egyszeresen összefüggő 4-sokaságot.

5.2.9. feladatok. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha S egy komplex felület, akkor $c_1(S) \in H^2(S; \mathbb{Z})$ egy karakterisztikus elem. (Ötlet: Reprezentáljuk $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ -t egy $\Sigma \subset X$ beágyazott (irányítható) felülettel és alkalmazzuk (az 5.2.3 tételhez hasonlóan) a Whitney szorzat-formulát. Mivel $c_1(T\Sigma) = 2 - 2g(\Sigma)$ páros, a megoldás adódik.)

(b) Lássuk be, hogy $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ -re $w_2(X)([\alpha]_2) \equiv Q_X(PD(\alpha), PD(\alpha)) \pmod{2}$. (Itt $[\alpha]_2 \in H_2(X; \mathbb{Z}_2)$ jelöli az $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ egész együtthatós homológia-osztály mod 2 redukcióját.)

(c) Bizonyítsuk be, hogy ha S egy zárt komplex felület, akkor 12 osztja a $c_2[S] + c_1^2[S]$ összeget. Lássuk be, hogy ebből egyszeresen összefüggő S -re $b_2^+(S)$ páratlansága következik.

5.3 Felfújás

Legyen $\tau = \{(l, p) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid p \in l\} = \{([u : v], (x, y)) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid vx = uy\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ feletti *tautologikus vonalnyaláb*; ismert, hogy $\langle c_1(\tau), [\mathbb{C}\mathbb{P}^1] \rangle = -1$. τ -t a második koordinátára vetítve egy érdekes $\pi: \tau \rightarrow \mathbb{C}^2$ függvényt kapunk: ha $p \in \mathbb{C}^2$ és $p \neq 0$, akkor $\pi^{-1}(p) = \{\text{pt.}\}$ egyetlen pont, míg $\pi^{-1}(0) \approx \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (hiszen $\pi^{-1}(p)$ éppen a p -n és origón átmenő egyenesek terével azonos).

5.3.1. lemma. *A tautologikus nyaláb totális terére $\tau \approx \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \{\text{pt.}\}$.*

Bizonyítás. Legyen $p \in \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ rögzített, és vegyünk egy $L \subset \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ projektív egyenest, mely p -t nem tartalmazza. A $q \mapsto L_{pq} \cap L \in L \approx \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ leképezés (ahol L_{pq} a p -n és q -n áthaladó egyetlen egyenest jelöli) egy $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \{p\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ fibrálást ad, melynek első Chern-száma -1 (pl. egy másik, p -t nem tartalmazó L' egyenes a nyáláb egy generikus szelése); mely bizonyítja a lemmát. \square

Mivel $\tau - \pi^{-1}(0) \approx \mathbb{C}^2 - \{0\}$, egy $p \in S$ pont környezetét az S komplex felületben \mathbb{C}^2 -vel azonosítva, majd ezt τ -ra cserélve egy S' új komplex felületet kapunk, melyet S *felfújtajának* nevezünk.

5.3.2. következmény. Az S' felfújtra $S' \approx S \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$. \square

Könnyen belátható, hogy ha L_1 és L_2 origón átmenő különböző komplex egyenesek \mathbb{C}^2 -ben, akkor τ -ban a $\pi^{-1}(L_i - \{0\})$ lezártak diszjunktak lesznek.

5.3.3. feladat. Legyen $L_1 = \{x = 0\}$ és $L_2 = \{y = 0\}$. Határozzuk meg az $\tilde{L}_i = \overline{\pi^{-1}(L_i - \{0\})}$ lezártakat és lássuk be, hogy diszjunktak.

5.3.4. definíció. A $C \subset S$ komplex görbére a $\tilde{C} = \overline{\pi^{-1}(C - \{p\})} \subset S'$ görbét a C *valódi transzformáltjának* nevezzük. A $C' = \pi^{-1}(C)$ inverz képet C *teljes transzformáltjának* hívjuk.

5.3.5. példa. Legyenek p_0, p_1 harmadfokú homogén 3-változós polinomok, melyekre a $V_{p_i} = \{[x : y : z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \mid p_i(x, y, z) = 0\}$ görbék ($i = 0, 1$) simák és egymást transzverzálisan metszik. Könnyen belátható, hogy V_{p_i} a T^2 2-dimenziós tóruszal diffeomorf, és hogy a $V_{p_0} \cap V_{p_1}$ metszet 9 pontból áll. Ilymódon ezt a kilenc pontot felfújva a $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ komplex felületben $F_0 = \tilde{V}_{p_0}$ és $F_1 = \tilde{V}_{p_1}$ diszjunkt tóruszokat kapunk. Vegyük észre, hogy a $p_t = p_{[t_0:t_1]} = t_0 p_0 + t_1 p_1$ definícióval egy olyan, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -gyel paraméterezett görbesereget kapunk, melyre a görbék egyrétűen lefedik a $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - \{V_{p_0} \cap V_{p_1}\}$ teret. A metszéspontokat felfújva így $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ -nek kapjuk egy ($\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -gyel paraméterezett) egyrétű lefedését — vagyis egy $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ fibrálást. Mivel a fibrumok harmadfokú (ún. *elliptikus*) görbék, ezt a fibrálást *elliptikus fibrálásnak* is nevezik.

Legyen $X = (\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \nu F_0) \cup_{T^3} (\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \nu F_0)$ 4-dimenziós sima sokaság.

5.3.6. állítás. A fent megadott X egyszeresen összefüggő, páros metszési formájú 4-sokaság, melyre $\chi(X) = 24$ és $\sigma(X) = -16$.

Bizonyítás. Mivel létezik olyan $S^2 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ beágyazott gömb, melyre $S^2 \cap F_0 = \{\text{pt.}\}$, $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \nu F_0) = 1$ adódik; ebből pedig a Van Kampen tétel alapján $\pi_1(X) = 1$ triviálisan következik. A $\chi(X) = 24$ egyenlőség belátása elemi feladat $\chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}) = 12$ és $\chi(\nu F_0) = 0$ alapján; így tehát $H_2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{22}$. A következőkben ennek a második homológia-csoportnak fogjuk egy olyan bázisát megadni, mely mind a metszetforma paritását, mind a szignatúra értékét mutatni fogja. Jelölje h a $H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}) \leq H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}; \mathbb{Z})$ rész generátorát, míg e_i az i -edik $H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}) \leq H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}; \mathbb{Z})$ részt generálja. Ilymódon $H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}; \mathbb{Z}) = \langle h \rangle \oplus \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_9 \rangle$; vegyük a következő bázist: $\{f = 3h - \sum_{i=1}^9 e_i, e_9, e_1 - e_2, \dots, e_7 - e_8, -h + e_6 + e_7 + e_8\}$. Könnyen látható, hogy $[F_0] = f$, és az egyetlen e_9 -et leszámítva a fenti bázis elemeinek négyzete páros — a metszetforma ebben a bázisban $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \oplus E_8$ mátrixszal reprezentálható. Mivel f -et csak az e_9 elem metszi nemtriviálisan, a $H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \nu F_0; \mathbb{Z})$ csoportban a fenti bázis (e_9 -et leszámítva) minden eleme megjelenik; mivel $\chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \nu F_0) = 12$ és $H_4(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \nu F_0; \mathbb{Z}) = 0$, a fenti 9 homológia-elem mellett két továbbira van szükségünk $H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \nu F_0; \mathbb{Z})$ egy bázisához. Ezek pedig éppen azok a peremen ($\approx T^3$) lévő 2-tóruszokkal reprezentálhatók, melyek nem homológok f -fel. A két $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \nu F_0$ kópia összeragasztásánál feltehető, hogy a perem 3-tórusz körei egymásba képződnek, így a fenti két $(-E_8)$ -at adó 16 elem mellett további hármat kapunk: a három peremen lévő 2-tóruszt (melyek négyzete 0). Minden ilyen tóruszhoz természetesen tartozik egy duális kör (a "harmadik kör" egy $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ felbontásban); mivel $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \nu F_0$ egyszeresen összefüggő, ezek a körök mindkét oldalon egy-egy felületet határolnak. A felületeket összeragasztva 3 további homológia-elemet kapunk — ezek négyzete nyilván választható párosnak például úgy, hogy a két féltérben ugyanazokat a felületeket választjuk. Mivel a fent felsorolt elemek négyzetei párosak, Q_X párossága következik. A metszési számok alaposabb vizsgálata azt is mutatja, hogy ebben a bázisban valójában a metszetformát a $-2E_8 \oplus 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cong -2E_8 \oplus 3H$ mátrix reprezentálja; evvel a bizonyítás kész. \square

5.3.7. megjegyzés. Mivel tehát $Q_X = -2E_8 \oplus 3H$, Freedman tétele szerint S_4 és X homeomorf 4-sokaságok; valójában ez a két sima 4-sokaság diffeomorf is. X -et természetes módon láthatjuk el komplex struktúrával — a fenti definíció pusztán annak topológiai lefordítása, hogy X a $\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$ komplex felület $F_0 \cup F_1$ menti dupla elágazó fedése.

6. előadás

Kirby diagramok

6.1 Egy új jelölés

Idézzük fel, hogy egy Kirby diagramban az 1-fogantyúkat S^3 -beli gömbpárokkal (az 1-fogantyú ragasztó gömbjeivel), míg a 2-fogantyúkat két "párhuzamos" görbével (a 2-fogantyú ragasztó illetve tüskéző köreivel) jelképeztünk. Mint azt már említettük, a 3- és 4-fogantyúkat egyértelműen lehet az $X_2 = \cup\{0-, 1-, \text{és } 2\text{-fogantyúkat}\}$ peremes sokasághoz ragasztani úgy, hogy egy zárt 4-sokaságot kapjunk, így ezekre nem fejlesztünk ki külön jelöléseket.

Legyen $U \subset S^3$ a *triviális csomó*: S^1 -nek tehát az a beágyazott képe, mely egy S^3 -ba beágyazott D^2 -t határol. (A fenti U -t ez a tulajdonság izotópia erejéig meghatározza.) Legyen továbbá $i: (D^2, S^1) \hookrightarrow (D^4, S^3)$ a $(D^2, S^1) = (\{0\} \times D^2, \{0\} \times \partial D^2) \subset (D^4, S^3)$ beágyazás; könnyen látható, hogy $i(S^1) \subset S^3$ az U triviális csomóval izotóp. Jelölje $\nu(i(D^2))$ az $i(D^2)$ részsokaság egy (nyílt) csőszerű környezetét. A következő tétel alkalmazásával 1-fogantyúkat egy új reprezentációja lehetséges.

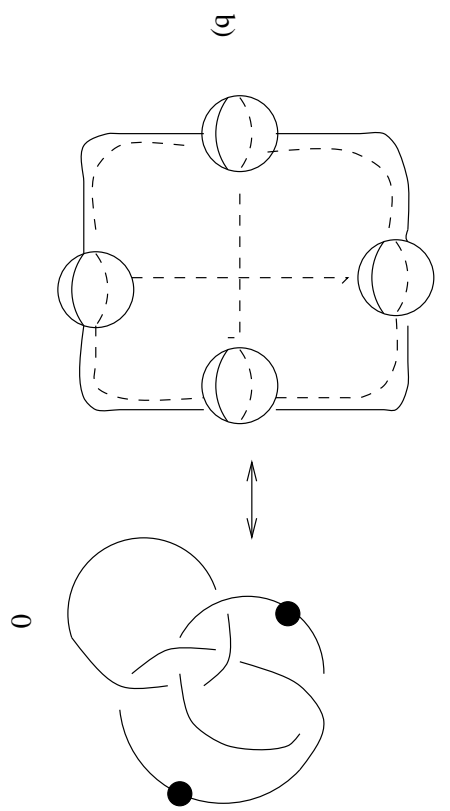
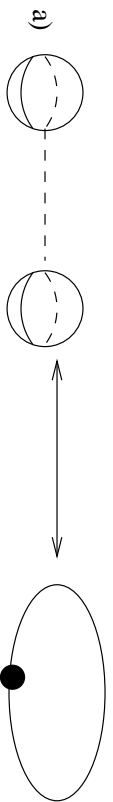
6.1.1. tétel. *A $D^4 - \nu(i(D^2))$ peremes 4-sokaság $S^1 \times D^3$ -mal diffeomorf, vagyis avval a (peremes) 4-sokasággal, mely egy 0- és egy 1-fogantyúból áll.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $D^4 - \nu(i(D^2)) = (D^2 - \nu\{\text{pt.}\}) \times D^2$, és mivel $D^2 - \nu\{\text{pt.}\}$ diffeomorf $S^1 \times D^1$ -gyel, a tétel D^2 -vel való szorzás után következik. \square

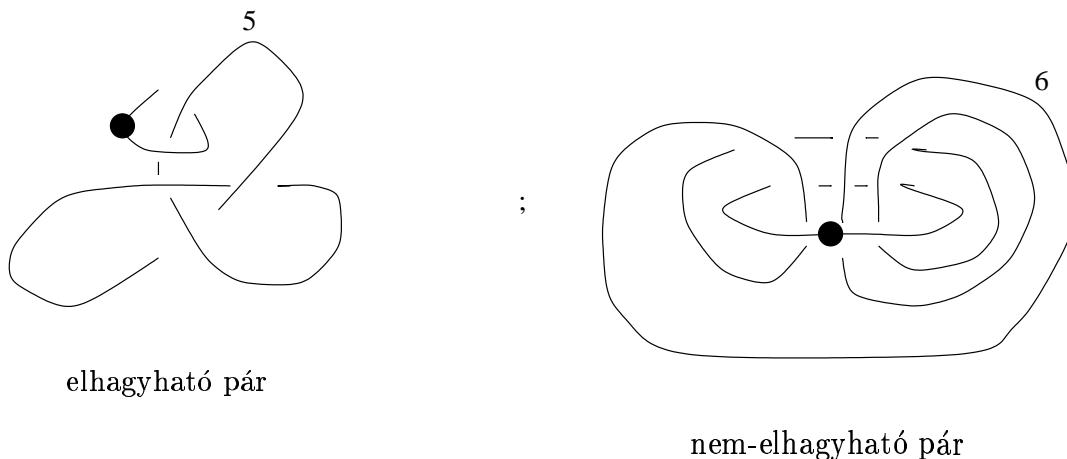
Indukciót alkalmazva látható be a fenti tétel általánosítása.

6.1.2. következmény. *Legyenek $p_j \in D^2$ ($j = 1, \dots, n$) különböző pontok a D^2 diszkben, és vegyük azt az $i: \cup_j (D_j^2, S_j^1) \hookrightarrow (D^4, S^3)$ beágyazást, melyet $(D_j^2, S_j^1) \rightarrow (\{p_j\} \times D^2, \{p_j\} \times \partial D^2) \subset (D^4, S^3)$ határoz meg. Ekkor $D^4 - \nu(\cup_j i(D_j^2))$ az $\#n S^1 \times D^3$ sokasággal diffeomorf, vagyis avval a 4-sokasággal, mely egy 0- és n darab 1-fogantyúból áll.* \square

Következésképp egy 1-fogantyú ragasztására úgy is gondolhatunk, mint $\nu(i(D^2))$ -nek D^4 -ből való elhagyására. Könnyen látható, hogy egy $f: S^1 \rightarrow \partial(S^1 \times D^3)$ 2-fogantyút ragasztó leképezés pontosan akkor megy át az 1-fogantyún, ha hurkolódik az $i(S^1)$, U -val izotóp csomóval. Evvel tehát új jelölést vezethetünk be 1-fogantyúkra: a triviális csomó S^3 -ban egy ponttal ellátva jelentsen egy 1-fogantyút, lásd a 6.1 ábrát. (Ebből tehát $S^1 \times D^3$ -at úgy kapjuk meg, hogy egy, a triviális csomó által határolt diszk belsejét D^4 -be nyomunk és elhagyjuk egy kis nyílt környezetét.) Amennyiben ezt az új jelölést alkalmazzuk, a 2-fogantyúkat ragasztó leképezései (1-fogantyúkat jelenlétében is) S^3 -ba mennek; itt pedig a tüskéző kör megrajzolása helyett elég a két kör hurkolódási számát feljegyezni. (Emlékezzünk vissza arra, hogy egy 4-dimenziós 2-fogantyú tüskézései $\pi_1(SO(2)) \cong \mathbb{Z}$ -re nézve affinteret alkotnak; S^3 -ban azonban a csomóra illesztett Seifert-felület kanonikusan kijelöl egy 0 tüskézésű elemet, a többi tüskézés ettől éppen a hurkolódási számban tér el.)



6.1 ábra: Új jelölés 1-fogantyúíkra



6.2 ábra: Elhagyható és el nem hagyható fogantyú-párok

6.2 Kirby-kalkulus

Egy 4-sokaság Kirby diagramja tehát nem más, mint egy lánc, melyben minden csomóra vagy egy egész szám vagy egy pont van elhelyezve — a pontozott csomók mind triviálisak és egymással nem hurkolódnak. Azt jelendő, hogy zárt sokaságról beszélünk, a rajz mellé általában odaírjuk a 3- és 4-fogantyúk számát (bár ezt a számot a rajz már meghatározza).

Két fogantyú-felbontás pontosan akkor diffeomorf ha izotópiával, fogantyú-csúsztatással és elhagyható párok bevezetésével/elhagyásával egyik felbontás a másikba alakítható (2.1.5 tétel). A következőkben e két utóbbi operáció (elhagyható párok bevezetése/elhagyása ill. fogantyú-csúsztatás) Kirby diagram-beli megjelenítését fogjuk tárgyalni.

6.2.1. tétel. *A h_1 1- és h_2 2-fogantyú pontosan akkor alkot elhagyható párt, ha a 2-fogantyú ragasztó köre egy pontban metszi az 1-fogantyú (pontosított) körére illeszthető S^3 -ba beágyazott D^2 golyót; vagyis a 2-fogantyú ragasztási köre és az 1-fogantyú pontosított köre geometriailag egyszer hurkolódik.*

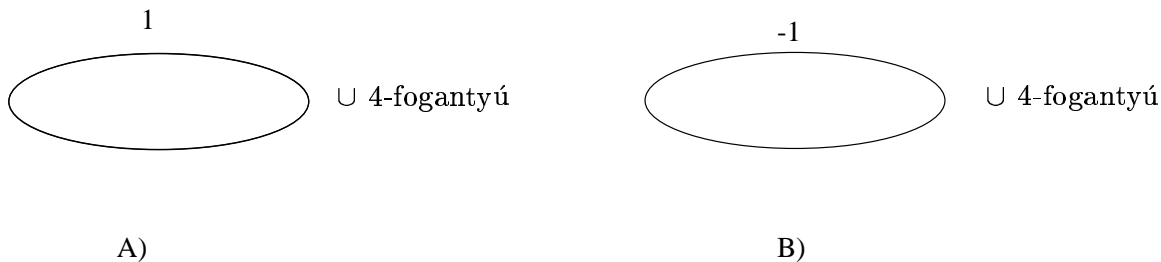
Bizonyítás. A fenti D^2 éppen a h_1 övgömbje egy darabjának választható, így a tétel pusztán a 2.1.4 tétel Kirby diagramokra való átfogalmazása. \square

6.2.2. megjegyzés. A fenti tételben fontos, hogy a 2-fogantyú ragasztási köre az 1-fogantyú pontosított körét geometriailag hurkolja egyszer; amennyiben csak az (algebrai) hurkolódási számuk 1, az $\alpha(h_1, h_2)$ algebrai metszet lesz csak egyenlő eggyel, ami nem elégséges ahhoz, hogy h_1 és h_2 elhagyható párt alkosson, lásd például a 6.2 ábrát.

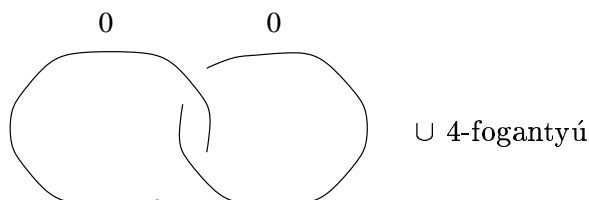
6.2.3. tétel. *A h_2 2- és h_3 3-fogantyú által alkotott (h_2, h_3) pár pontosan akkor hagyható el, ha h_2 megfelelő fogantyú-csúsztatások után a triviális, az ábra többi részétől elválasztható csomó mentén 0 tüskézéssel van odaragasztva.*

Bizonyítás. Az egyik irány kézenfekvő: a triviális csomó mentén 0 tüskézéssel odaragasztott 2-fogantyú $S^2 \times D^2$ -t ad, melyhez egy 3-fogantyút ragaszthatunk úgy, hogy az eredmény D^4 legyen — és az elhagyhatóság tényén fogantyú-csúsztatás nem változtat. Ha h_2 és h_3 elhagyható párt alkot, akkor h_3 ragasztó gömbjének (mely S^2 -vel diffeomorf) alsó félgömbje mentén h_2 -t egy, a többi fogantyútól diszjunkt $\partial D^4 = S^3$ -ban levő körbe lehet izotópiával mozgatni. A tüskézés a fenti félgömb szerint triviális, így a tétel következik. \square

Legyen most h_1 és h_2 két 2-fogantyú, és csúsztassuk át h_1 -et h_2 -n. Ekkor h_2 ragasztó leképezése természetesen nem változik (a csúsztatás $\partial(X \cup h_2)$ -ben egy izotópia), h_1 -é azonban igen:



6.3 ábra: Kirby diagram $\mathbb{C}P^2$ -re és $\overline{\mathbb{C}P^2}$ -ra



6.4 ábra: $S^2 \times S^2$ egy Kirby diagramja

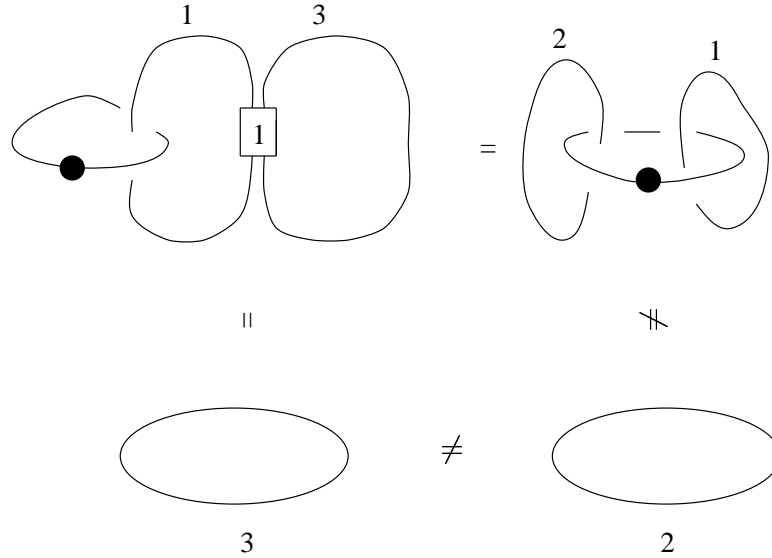
6.2.4. tétel. Legyen (K_i, n_i) a h_i fogantyú ragasztási köre és tüskézése ($i = 1, 2$), és csúsztassuk át h_1 -et h_2 -n. Ekkor az új h'_1 fogantyú ragasztó köre $K_1 \# K_2$ lesz, melynek tüskézése $n_1 + n_2 \pm lk(K_1, K_2)$ -vel egyenlő. (A \pm előjel attól függ, hogy a szalag, mely mentén az $\#$ összefüggő összeget vesszük, tartja-e az irányítást vagy sem. Ez a szalag egyébként tetszőleges lehet.)

Bizonyítás. Emlékezzünk arra, hogy h_1 -et úgy tudjuk h_2 -n átcsúsztatni, hogy K_1 ragasztási gömbjének (ami esetünkben egy kör) egy kis darabját izotópiával addig mozgatjuk, míg az egy pontban nem metszi h_2 övgömbjét (esetünkben ez is egy kör), lásd a magyarázatot a 2.1 fejezet elején. A $\partial(X \cup h_2)$ 3-sokaságban a metszéspontok érintőterében a két érintő egyenes (h_1 ragasztási és h_2 övgömbjének érintője) egy 1-kodimenziós alteret feszít ki; a kimaradó dimenzió a ragasztási gömb mozgásának irányát mutatja meg. Visszafelé tolva az eredeti állapotot kapjuk meg újra, előre haladva K_1 kis darabkája párhuzamosan halad K_2 -vel, majd visszatér K_1 -hez. Az út, melyen ez a kis darab K_1 -ből K_2 -be mozog, egy előre rögzített szalagtól függ; ezt tetszőlegesen választhatjuk meg. A tüskézésre adott formuláról legkönnyebben úgy győződhetünk meg, ha K_1 kis darabkájával együtt egy kísérő kört is mozgatunk. Vegyük észre, hogy a $K_1 \# K_2$ -vel jelölt csomó a szalag választásától is függ (a tüskézés azonban csak attól függ, összeadjuk-e vagy levonjuk a két fogantyút). \square

6.2.5. példák. (a) A triviális csomó mentén n tüskézéssel D^4 -hez egy 2-fogantyút ragasztva az S^2 feletti n Chern-számú komplex vonalnyaláb totális terét kapjuk. Korábban láttuk, hogy $\mathbb{C}P^2$ -ből (illetve $\overline{\mathbb{C}P^2}$ -ből) egy pontot (pontosabban egy 4-fogantyút) elhagyva egy $+1$ (illetve -1) Chern-számú nyálábot kapunk. Következésképp $\mathbb{C}P^2$ Kirby diagramja egy 1 tüskézésű triviális csomó és egy 4-fogantyú — hasonlóan, $\overline{\mathbb{C}P^2}$ Kirby diagramját egy -1 tüskézésű triviális csomó adja a megfelelő 4-fogantyúval; lásd a 6.3 ábrát.

(b) Mivel $S^2 \times S^2$ a triviális S^2 feletti komplex vonalnyaláb duplázásaként állítható elő, így a 0 tüskézésű Hopf lánc (plusz egy 4-fogantyú) $S^2 \times S^2$ egy Kirby diagramját adja (6.4 ábra).

Összefoglalva, 2-fogantyúk csúsztatását úgy tudjuk egy Kirby diagramban megjeleníteni, hogy a (K_1, K_2) ragasztási köröket $(K_1 \# K_2, K_2)$ -re cseréljük, a tüskézéseket pedig $(n_1, n_2) \mapsto (n_1 + n_2 \pm lk(K_1, K_2), n_2)$ szerint változtatjuk. (Emlékezzünk arra, hogy $\#$ egy választott γ úttól is függ; ez a γ egyébként tetszőleges. Következésképp a csúsztatás utáni Kirby diagram nem egyértelmű.) Egy 2/3 pár elhagyása egy, az ábra többi részétől elválasztható, 0 tüskézésű triviális csomó és egy 3-fogantyú elhagyását jelenti. Ha h_1 és h_2 elhagyható 1/2 párt alkot, akkor minden, h_1 pontozott körével hurkolódó 2-fogantyút először h_2 -n alkalmasan (esetleg



6.5 ábra: Elhagyható párok egy Kirby diagramban

többször is) átcsúsztatva elérhető, hogy h_1 a h_2 -n kívüli fogantyúktól elválasztható legyen — ekkor az elhagyható párnak megfelelő két csomó a diagramból egyszerűen elhagyható. (Az elhagyható pár 2-fogantyújának ragasztási köre hurkolódhat esetleg más 1- vagy 2-fogantyú köreivel — az 1-fogantyú pontozott köre azonban nem teheti ezt, lásd a 6.5 ábrát. Ez természetes, ha meggondoljuk, hogy olyan 1-fogantyúra nem ragaszthatunk további 2-fogantyút, melyet el akarunk hagyni.) Végül egy 1-fogantyút úgy tudunk egy másik 1-fogantyún átcsúsztatni, hogy pontozott köreiket 0 tuskézésű köröknek tekintve alkalmazzuk a 2-fogantyú csúsztatására tanultakat. A γ út választásával azonban vigyáznunk kell — mivel az eredmény is egy 1-fogantyú pontozott köre (tehát egy triviális, a többi pontozott körtől elválasztható kör) kell hogy legyen, γ nem lehet tetszőleges. (Ha azonban teljesíti az előbbieken leírt feltételt, a csúsztatás γ mentén végrehajtható.) Természetesen a fenti transzformációk inverzei sem változtatják meg a fogantyú-felbontás diffeomorfizmus típusát, így például bevezethetők elhagyható párok, lásd például a 6.6 ábrát.

Mint már korábban láttuk, egy fogantyú-felbontás fogantyúinak metszései és a sokaság homológiái között szoros összefüggés van — lásd az 1.3 fejezetet. A következőkben ezt a kapcsolatot egy olyan egyszerűen összefüggő X 4-sokaságra vizsgáljuk, melynek adott fogantyú-felbontásában nem szerepelnek sem 1- sem 3-fogantyúk.

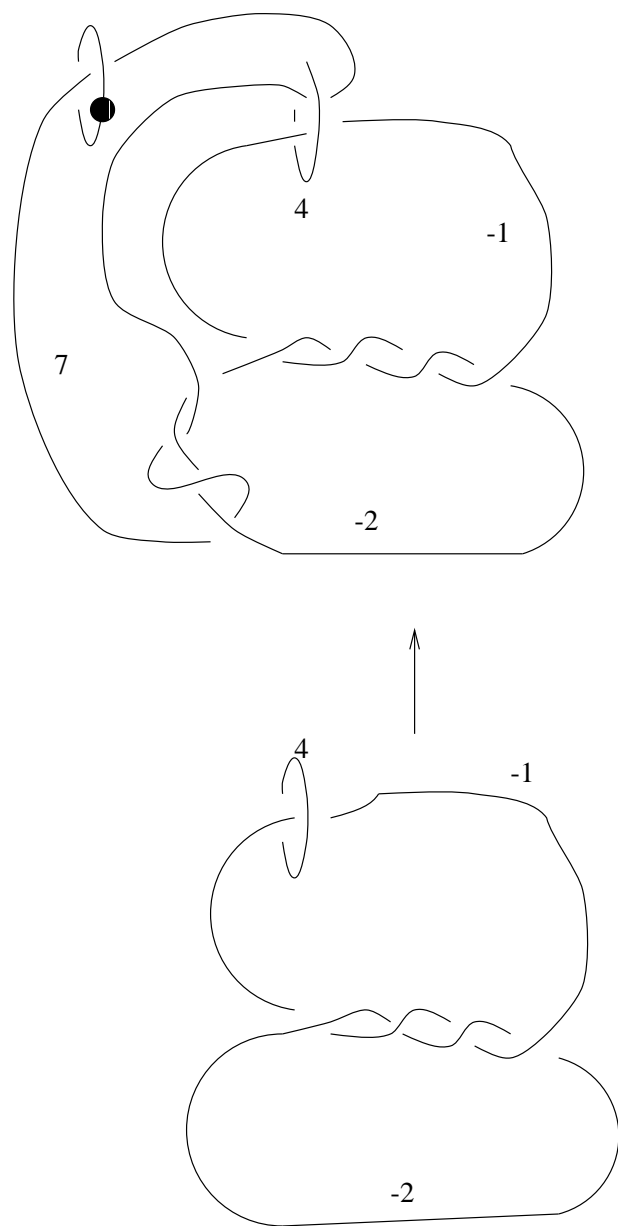
6.2.6. tétel. *A 2-fogantyú ragasztó köreinek hurkolódási mátrixa (a tuskézésekkel a diagonálisban) éppen Q_X -et adja meg $H_2(X; \mathbb{Z})$ -nek a 2-fogantyúk által meghatározott bázisában.*

Bizonyítás. Az 1.3.2 tétel szerint a 2-fogantyú éppen $H_2(X; \mathbb{Z})$ egy bázisát adják (hiszen a feltétel szerint $C_1 = C_3 = 0$). Legyen $(Z_i, \partial Z_i) \subset (D^4, S^3)$ olyan beágyazott felület, melyre $\partial Z_i = K_i$ az i -edik 2-fogantyú ragasztási köre. Ekkor Z_i -ket a 2-fogantyú magjaival zárt felületekké téve $H_2(X; \mathbb{Z})$ fenti bázisának kapjuk felület-reprezentánsait. Mivel a fogantyú magjai diszjunktak és az $lk(K_i, K_j)$ hurkolódási szám megegyezik Z_i és Z_j algebrai metszetével, az állítás következik. \square

6.2.7. megjegyzés. Egy egyszerűen összefüggő CW-komplexusra mindig található olyan cella-felbontás, melyben sem 1- sem 3-cellák nem szerepelnek. Nyitott kérdés azonban az, hogy egyszerűen összefüggő zárt 4-sokaságra létezik-e olyan fogantyú-felbontás, melyben nem szerepelnek 1-fogantyúk.

A következő állítás az összefüggő összeg és a Kirby diagramok közötti kapcsolatot mutatja meg.

6.2.8. állítás. *Rögzítsünk egy Kirby diagramot az X_1 illetve az X_2 sokaságra. Ekkor a két diagram unióját véve az $X_1 \# X_2$ 4-sokaság egy Kirby diagramját kapjuk.*



6.6 ábra: Példa egy elhagyható pár bevezetésére

Bizonyítás. Távolítsuk el X_1 és X_2 4-fogantyúját, és vegyük az így kapott (S^3 peremű) sokaságok határösszegét. Ez nem jelent mást, mint egy 1-fogantyú bevezetését, mellyel a két 0-fogantyú közül az egyiket rögtön el is hagyhatjuk. Tehát a peremes sokaságok határösszege örökli a fogantyú-felbontásokat, így egy 4-fogantyú visszarágasztása után a diagram éppen a két diagram diszjunkt (egymástól síkkal elválasztható) uniója lesz. \square

6.2.9. feladatok. (a) Lássuk be a fenti Kirby diagramok és fogantyú-csúsztatás segítségével, hogy $S^2 \times S^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ és $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ diffeomorfak.

(b) Általánosabban, bizonyítsuk be, hogy ha X -nek van egy olyan fogantyú-felbontása, melyben nem szerepelnek 1-fogantyúk, és Q_X páratlan, akkor $X \# S^2 \times S^2$ és $X \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ diffeomorf 4-sokaságok.

Egy $(X, \partial_- X)$ relatív fogantyú-felbontásra a következő módon adhatunk Kirby diagramot. Legyen Y olyan 4-sokaság, melynek pereme $\partial_- X$, és vegyük ennek az Y -nak egy fogantyú-felbontását. Feltehető (Y esetleges olyan megváltoztatásával, mely a peremét nem befolyásolja), hogy a felbontásban sem 1- sem 3-fogantyúk nem szerepelnek. A kapott tüskézett lánc tehát egy $\partial_- X$ határu 4-sokaságot jelképez, erre kell X fogantyúit ragasztani — ezekre már megvan a kifejlesztett jelölésrendszer. Ahhoz, hogy X és Y fogantyúit megkülönböztessük, a következő konvenciót alkalmazzuk: az Y -beli tüskézéseket tegyük zárójelbe. Természetesen egy Y -beli fogantyú nem csúsztható át egy X -belin, más fogantyú-csúsztatások azonban elvégezhetők, és az eddig megismert módon transzformálják rajzunkat. A korábbiakhoz hasonlóan lehet (természetesen csak X -ben) elhagyható párokat elhagyni/bevezetni. Relatív fogantyú-felbontások Kirby diagramjait a továbbiakban nem fogunk alkalmazni, így ezek részletes tárgyalásától eltekintünk (a további részletekről lásd [GS]).

7. előadás

Kobordizmusok, h -kobordizmusok

Ebben a fejezetben sokaságok kobordizmusaival illetve h -kobordizmusaival fogunk foglalkozni; a 4-dimenziós esetre a következő fejezetben fogunk külön kitérni. Az X_0 és X_1 zárt, irányított n -dimenziós sokaságok *kobordánsak*, ha létezik olyan W^{n+1} ($n+1$)-dimenziós sokaság, melyre $\partial W = \overline{X_0} \cup X_1$ teljesül. Az n -dimenziós zárt, irányított sokaságok kobordizmus-osztályai a diszjunkt unióra (\amalg) mint összeadásra nézve egy Abel-csoportot alkotnak, melyet Ω_n -nel jelölünk. Könnyű számolás mutatja, hogy $\Omega_0 \cong \mathbb{Z}$, $\Omega_1 = 0$ és $\Omega_2 = 0$. Rohlin egy tétele szerint $\Omega_3 = 0$, vagyis minden irányított, zárt 3-sokaság előáll egy irányított 4-sokaság határáként. Az $[X] \mapsto \sigma(X)$ leképezés (mely tehát X^4 kobordizmus-osztályához X szignatúráját rendeli) egy $\Omega_4 \rightarrow \mathbb{Z}$ homomorfizmust ad meg, melyről belátható, hogy izomorfizmus, következésképp $\Omega_4 \cong \mathbb{Z}$. (A fenti állítások bizonyításai például Kirby [K2] könyvében találhatóak meg.)

7.1 h -kobordizmusok

7.1.1. definíció. Az X_0 és X_1 zárt, irányított, egyszeresen összefüggő n -dimenziós sokaságok *h -kobordánsak* (vagyis homotopikusan kobordánsak), ha létezik közöttük egy olyan W^{n+1} kobordizmus, melyre az $i_j: X_j \hookrightarrow W$ ($j = 0, 1$) beágyazások homotopikus ekvivalenciák.

A következőkben h -kobordizmusokat fogunk részletesen vizsgálni, és a következő eredményt fogjuk belátni.

7.1.2. tétel. (*h -kobordizmus tétel*) *Tegyük fel, hogy W egy h -kobordizmus az egyszeresen összefüggő X_0, X_1 n -dimenziós sokaságok között és $n \geq 5$. Ekkor W diffeomorf a triviális $X_0 \times I$ kobordizmussal.*

7.1.3. következmény. *Ha X_0 és X_1 h -kobordáns (egyszeresen összefüggő) n -sokaságok és $n \geq 5$, akkor X_0 és X_1 diffeomorfak.* \square

7.2 A h -kobordizmus tétel bizonyítása

Legyen W^{n+1} egy h -kobordizmus X_0 és X_1 között, és vegyük W egy relatív fogantyú-felbontását $\partial_- W = X_0$ választással. Célunk megmutatni azt, hogy ez a felbontás triviálisnak is választható, vagyis feltehető, hogy nem tartalmaz egyetlen fogantyút sem. Korábbiakból (2.1.7 állítás) következik, hogy feltehetjük, a felbontás nem tartalmaz 0- és $(n+1)$ -fogantyúkat.

7.2.1. állítás. *Legyen W egyszeresen összefüggő kobordizmus, és tegyük fel, hogy $n \geq 4$. Ekkor a fogantyú-felbontásról feltehető, hogy nem tartalmaz 1-fogantyút.*

Bizonyítás. Adott fogantyú-felbontás h 1-fogantyújához egy elhagyható 2-fogantyú/3-fogantyú párt fogunk találni, melyre h és a 2-fogantyú szintén elhagyható párt alkot. Ily módon (elhagyva a $h/2$ -fogantyú párt) h -t

a fenti 2-fogantyú/3-fogantyú pár 3-fogantyújára cseréltük; ezt a műveletet minden 1-fogantyún elvégezve az állítás következik.

Legyen tehát $W_2 = X_0 \times I \cup \{1\text{-fogantyúk}\} \cup \{2\text{-fogantyúk}\}$, és legyen K_1 olyan beágyazott kör $\partial_+ W_2$ -ben, mely h övgömbjét egyszer metszi, K_2 pedig a többi fogantyútól diszjunkt $X_0 \times \{1\}$ -beli triviális csomó a triviális tüskézéssel. A korábbiak szerint K_1 mentén (tetszőleges tüskézéssel) W_2 -höz egy 2-fogantyút ragasztva h -t egy elhagyható pár 1-fogantyújává tehetjük. K_2 mentén pedig (a triviális tüskézéssel) olyan 2-fogantyú ragasztható, melyhez alkalmas 3-fogantyút ragasztva egy elhagyható 2-fogantyú/3-fogantyú párt kapunk. Ezt az utóbbi elhagyható párt bevezetve csak azt kell belátnunk tehát, hogy K_1 és K_2 a $\partial_+ W_2$ peremben izotópok. Mivel $\pi_1(W) = \pi_1(X_0) = 1$, és így W_2 is egyszeresen összefüggő (hiszen $\pi_1(W)$ -ben az 1-fogantyúk adják a generátorokat, míg a 2-fogantyúk a relációkat), azt rögtön megkapjuk, hogy K_1 és K_2 a W_2 sokaságban homotópok. Egy ilyen homotópiáról dimenzió okok miatt feltehető, hogy diszjunkt W_2 minden 1- és 2-fogantyújának magjától (melyeket függőlegesen lefolytattunk egész $X_0 \times \{0\}$ -ig). Ebből következőleg a homotópia $\partial_+ W_2$ -ben is választható. Ebben az n -dimenziós sokaságban ($n \geq 4$) azonban egy homotópiáról feltehető, hogy izotópia: $n > 4$ -re egyszerűen a homotópia (a 2-dimenziós cső folytonos képe) beágyazottnak választható; $n = 4$ esetében pedig (ismét dimenzió okokból) a csőnek véges sok önátmetszése van, melyekről feltehetjük, hogy különböző t paraméter-értékekhez tartoznak. Evvel az észrevétellel a bizonyítás kész. \square

7.2.2. következmény. *Egy W^{n+1} ($n \geq 4$) h -kobordizmusról feltehető, hogy nem tartalmaz 0-, 1-, n - és $(n+1)$ -fogantyúkat.*

Bizonyítás. Az előző állítást a duális felbontásra alkalmazva (és használva, hogy $n \geq 4$) a következmény adódik. \square

Jelölje $\{h_1^i, \dots, h_{n_i}^i\}$ a W egy fenti fogantyú-felbontásának i -fogantyúit. Mint azt már láttuk, a $\{h_j^i \mid j = 1, \dots, n_i\}$ szabad generátorokkal generált C_i szabad Abel-csoportok az 1.3 részben definiált $\partial: C_i \rightarrow C_{i-1}$ határolóoperátorokkal egy olyan (C_i, ∂) lánckomplexust alkotnak, melyre $H_*(C, \partial) = H_*(W, \partial_- W; \mathbb{Z})$. Mivel ez utóbbi csoport triviális (hiszen W h -kobordizmus), könnyű algebrai megfontolás bizonyítja a következő állítást.

7.2.3. tétel. *A C_i csoportoknak léteznek olyan $\{k_1^i, \dots, k_{n_i}^i\}$ bázisai, hogy ezekben a bázisokban a ∂ leképezést olyan mátrix reprezentálja, melynek diagonálisában 1 vagy 0 áll, a diagonálison kívüli elemek pedig mind 0-k. \square*

A fenti tétel más szavakkal azt jelenti, hogy a bázisok $\{k_j^i \mid i = 2, \dots, n-1; j = 1, \dots, n_i\}$ uniójának létezik egy $\{(k_{j_1}^i, k_{j_2}^{i-1})\}$ párokra történő partíciója úgy, hogy $\partial k_{j_1}^i = k_{j_2}^{i-1}$.

7.2.4. tétel. *Egy fenti típusú bázistranszformáció C_i -ben fogantyú-csúsztatással is megvalósítható. Következésképp feltehetjük, hogy a $k_j^i \in C_i$ báziselemek i -fogantyúknak felelnek meg.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $i > k$ esetén elvégeztük a szükséges fogantyú-csúsztatásokat, és megtaláltuk a C_i csoportok megfelelő bázisait. Indukciót alkalmazva tehát pusztán egy olyan (h^k, h^{k-1}) fogantyú-párt kell találnunk, melyre $\partial h^k = h^{k-1}$. (Ebből $\partial^2 = 0$ miatt $\partial h^{k-1} = 0$ már következik.) Ekkor (esetleg h^{k-t} a többi fogantyún — esetleg többször is — átcsúsztatva) feltehető, hogy h^{k-1} nem szerepel más k -fogantyú határában, így az eljárás folytatható. A (h^k, h^{k-1}) fenti pár megtalálásához azonban elég egy olyan párt találni, melyre $\partial h^k = h^{k-1} +$ további $(k-1)$ -fogantyúk lineáris kombinációja, hiszen h^{k-1} alkalmas (esetleg többszöri) csúsztatásával ez a pár már egy $\partial h^k = h^{k-1}$ -et teljesítő párrá alakítható. Legyen tehát $n = \{|n_{ij}| \mid h_j^{k-1}$ együtthatója ∂h_i^k -ban $n_{ij}\}$. Az euklideszi algoritmust alkalmazva könnyen látható, hogy $n > 1$ esetén n értéke csökkenthető, ami bizonyítja az állítást. \square

Ilymódon tehát a $k_{j_1}^i$ fogantyú $S_a(k_{j_1}^i)$ ragasztó gömbje algebrailag egyszer metszi $k_{j_2}^{i-1}$ övgömbjét, és $S_a(k_{j_1}^i)$ algebrailag nulla pontban metszi minden további $(i-1)$ -fogantyú övgömbjét. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy $S_a(k_{j_1}^i)$ ténylegesen diszjunkt ezektől az övgömböktől (és $k_{j_2}^{i-1}$ övgömbjét pontosan egy pontban metszi) — az algebrai metszetszám kiszámításánál a pontokat előjelesen számoljuk össze, így az ellentétes előjelű pontpárok az algebrai metszetszámon nem, csak a geometriain változtatnak.

7.2.5. megjegyzés. Két fogantyú (vagy általánosabban, két komplementer dimenziós Σ_1, Σ_2 zárt részsokaság) algebrai metszetszámát már az 1.3.1 megjegyzésben tisztáztuk. A $\gamma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ geometriai metszetszámon pusztán a transzverzális metszet (véges) $|\Sigma_1 \cap \Sigma_2|$ elemszámát értjük. Nyilván $|\alpha(\Sigma_1, \Sigma_2)| \leq \gamma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ (és az utóbbi mindig nem-negatív) és $\alpha(\Sigma_1, \Sigma_2) \equiv \gamma(\Sigma_1, \Sigma_2) \pmod{2}$. Mint azt a fenti okfejtésben már említettük, $\alpha(\Sigma_1, \Sigma_2) = \gamma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ nem feltétlenül áll fenn minden Σ_1, Σ_2 esetén.

A következő tétel éppen a két számítási mód közti különbséget “tünteti le”. Ez az a pont, ahol az $n \geq 5$ feltétel nagyon fontos lesz — mint látni fogjuk, $n = 4$ esetén sem a következő tétel (a “Whitney trükk”), sem a h -kobordizmus tétel maga nem igaz.

7.2.6. tétel. (Whitney trükk) *Tegyük fel, hogy $Y_1^n, Y_2^m \subset X^{n+m}$ összefüggő, irányított, zárt, sima n - és m -dimenziós részsokaságok az X $(n+m)$ -dimenziós egyszeresen összefüggő sima sokaságban és Y_1 transzverzálisan metszi Y_2 -t. Tegyük fel továbbá, hogy $m \geq 3$ és $n \geq 2$ (valamint ha $n = 2$ akkor $\pi_1(X - Y_2) = 1$). Ekkor ha $p, q \in Y_1 \cap Y_2$ előjele különböző, akkor található egy olyan $\varphi: X \times [0, 1] \rightarrow X$ leképezés, melyre rögzített $t \in [0, 1]$ mellett $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ diffeomorfizmus, $\varphi_0 = \text{id}_X$ és $\varphi_1(Y_1) \cap Y_2 = Y_1 \cap Y_2 - \{p, q\}$. \square*

Következésképp X egy φ izotópiájával Y_1 elmozdítható úgy, hogy $\gamma(Y_1, Y_2)$ kettővel csökken (hiszen p és q eltűnik a metszetből), míg $\alpha(Y_1, Y_2)$ változatlan marad. A fenti eljárás véges sokszori alkalmazásával feltehető tehát, hogy (a tétel feltételeinek teljesülése esetén) $\alpha(Y_1, Y_2) = \pm \gamma(Y_1, Y_2)$, vagyis minden metszéspont azonos előjelű lesz.

7.2.7. megjegyzés. A 7.2.6 tétel bizonyítása vázlatosan a következő módon történik: Legyen C_1 (illetve C_2) egy p -t q -val Y_1 -ben (ill. Y_2 -ben) összekötő út. A kettőt összefűzve tehát egy $C_{p,q}$ kört (egy, a $\{p, q\}$ párhoz tartozó *Whitney kört*) kapunk. A feltételek szerint $X - (Y_1 \cup Y_2)$ egyszeresen összefüggő, így $C_{p,q}$ egy $f: D^2 \rightarrow X$ (ahol is $f(\text{int } D^2) \subset X - (Y_1 \cup Y_2)$) leképezés $f|_{\partial D^2}$ megszorításának képeként állítható elő. Mivel $\dim X \geq 5$, a fenti f leképezésről feltehető, hogy beágyazás. (Az $f(\text{int } D^2) = D_{p,q} \subset X - (Y_1 \cup Y_2)$ képet szokás a $\{p, q\}$ párhoz tartozó *Whitney diszknek* nevezni.) Mivel p és q előjele különböző, belátható, hogy a fentiek valójában egy $D^2 \times D^{n+m-2}$ 2-fogantyú beágyazására is elmondhatók; mégpedig úgy, hogy Y_1 -ben a perem képe $C_1 \times D^{n-1}$ (ill. Y_2 -ben $C_2 \times D^{m-1}$) lesz. (Ez az a pont, ahol kihasználjuk, hogy p és q ellentétes előjelű metszéspontok.) Az ily módon megtalált 2-fogantyúban (lokálisan) könnyen található egy p -t és q -t eltüntető izotópia, ami bebizonyítja a tételt.

7.2.8. feladat. Ellenőrizzük le, hogy a 7.2.2 következmény által adott fogantyú-felbontás megfelelő fogantyú-párjainak ragasztási és övgömbjeire teljesülnek a Whitney trükk (7.2.6 tétel) feltételei. (*Ötlet:* Mivel nincsenek 0-, 1-, n - és $(n+1)$ -fogantyúk, a dimenzió-feltétel automatikus; így pusztán $\pi_1(X - Y_2) = 1$ -et kell leellenőrizni; evvel kapcsolatban lásd a 8.2.1 feladatot.)

A 7.2.6 tételt sorra a $\{(k_{j_1}^i, k_{j_2}^{i-1})\}$ párokra alkalmazva azokat elhagyható párokká tehetjük; ugyanígy a 0 algebrai metszést mutató fogantyú-párok ragasztó és övgömbjeit is diszjunktá tehetjük. (Vegyük észre, hogy a 7.2.7 megjegyzésben leírt vázlat azt mutatja, hogy a Whitney trükk lokális, vagyis p és q eltüntetés során nem keletkeznek újabb metszéspontok.) Az elhagyható párokat egymás után elhagyva végülis W egy olyan felbontását kapjuk, melyben egyetlen fogantyú szerepel sem, így a h -kobordizmus tételt beláttuk. \square

A h -kobordizmus tételnek számos fontos és érdekes alkalmazása található a magasabb dimenziós sokaságok topológiájának tanulmányozásában; ezen témákra jelen jegyzetben nem térünk ki, lásd például Milnor [M3] könyvét.

8. előadás

h -kobordizmusok 4-dimenziós sokaságok között

Az előző előadásban belátott h -kobordizmus tétel (7.1.2 tétel) bizonyításában többször is használtuk az $n \geq 5$ feltételt. Ebben az előadásban (egy 10. előadás-beli tételt alkalmazva) belátjuk, hogy $n = 4$ esetén a h -kobordizmus tétel nem igaz, majd a témához kapcsolódó érdekes eredményeket mutatunk meg.

8.1 h -kobordizmusok és metszetformák

Legyen tehát W^5 egy egyszeresen összefüggő h -kobordizmus X_0^4 és X_1^4 egyszeresen összefüggő 4-dimenziós sokaságok között. A 7.2.2 következmény (mely csak $n \geq 4$ -et kíván meg) alapján W -nek választható olyan fogantyú-felbontása, melyben csak 2- és 3-fogantyúk szerepelnek. Jelölje W_2 az $X_0 \times I$ -hez ragasztott 2-fogantyúk unióját.

8.1.1. lemma. *Ha W_2 -ben k darab 2-fogantyú szerepel, akkor $\partial_+ W_2$ diffeomorf $X_0 \# k(S^2 \times S^2)$ -vel.*

Bizonyítás. Legyen $S \subset \partial_+(X_0 \times I)$ a h 2-fogantyú ragasztási gömbje. Mivel $\partial_+(X_0 \times I) = X_0 \times \{1\}$ egy egyszeresen összefüggő 4-dimenziós sokaság, feltehető, hogy S (izotópia erejéig) egy $S^4 \# X_0$ felbontásban a standard $S^1 \subset S^4$ -gyel azonos. Ebben az esetben pedig a fogantyú-ragasztás egy kobordizmust jelent S^4 és $S^2 \times S^2$ között; az érvelést a többi 2-fogantyúra elismételve a lemma adódik. \square

8.1.2. feladat. Lássuk be, hogy $S^4 \times I$ -hez a standard $S^1 \subset S^4 \times \{1\}$ mentén egy (5-dimenziós) 2-fogantyút ragasztva a kapott V sokaságra $\partial_+ V \approx S^2 \times S^2$ teljesül.

8.1.3. következmény. *Ha X_0 és X_1 h -kobordáns 4-sokaságok, akkor létezik olyan k hogy $X_0 \# k(S^2 \times S^2) \approx X_1 \# k(S^2 \times S^2)$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző lemmát a duális felbontásra, és vegyük észre, hogy a duális vételével pusztán felcseréljük X_0 és X_1 , illetve a 2- és 3-fogantyúk szerepét. Mivel X_0 és X_1 h -kobordánsak, tehát $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$, a 8.1.1 lemmából X_0 -ra és X_1 -re kapott két k érték megegyezik, így a következmény adódik. \square

A következő tétel azt mutatja, hogy egy 4-sokaság h -kobordizmus-osztálya a sokaság algebrai tulajdonságaitól függ csak. Ez a tétel az első lépésnek bizonyul majd a korábban már többször említett topologikus osztályozás irányába.

8.1.4. tétel. *Az X_0 és X_1 egyszeresen összefüggő 4-sokaságok között pontosan akkor létezik egy W^5 h -kobordizmus, ha $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$.*

Bizonyítás. A W^5 h -kobordizmus léte egy $i_1^* \circ (i_0^*)^{-1}: H^*(X_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_1; \mathbb{Z})$ gyűrű-izomorfizmust ad, mely bizonyítja, hogy $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$. Ha $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$, akkor speciálisan $\sigma(X_0) = \sigma(X_1)$, így létezik egy V kobordizmus X_0 és X_1 között. Ennek 1-fogantyúit kiműtve egy olyan V' kobordizmust kapunk, melynek van csak 2- és 3-fogantyúkat használó fogantyú-felbontása (alkalmazzuk 7.2.2 következményt). Legyen $V'_2 = (X_0 \times I) \cup \{2\text{-fogantyúk}\}$, míg DV'_2 ennek komplementuma V' -ben. Mint azt már láttuk, $\partial_+ V'$ diffeomorf $X_0 \# kS^2 \times S^2$ -vel (itt k a V' -beli 2-fogantyúk számát jelöli). Ha V'_2 -re úgy tudjuk DV'_2 -t ráragasztani, hogy a 2-fogantyúk övgömbjei algebrailag δ_{ij} szerint messék a 3-fogantyúk ragasztó gömbjeit, akkor a választott f ragasztással $V'_2 \cup_f DV'_2 = W$ egy h -kobordizmus lesz. Következésképp, a tétel bizonyításához pusztán egy előírt $\varphi: H_2(\partial_+ V'_2; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\partial_- DV'_2; \mathbb{Z})$ izomorfizmusra kell egy olyan f diffeomorfizmust találni, melyre $f_* = \varphi$. Ezt garantálja a következő tétel, mellyel a 8.1.4 tétel bizonyítása kész. \square

8.1.5. tétel. (Wall, [W2]) *Legyen X egyszeresen összefüggő, indefinit metszetformájú 4-sokaság. Ekkor $(H_2(X \# S^2 \times S^2; \mathbb{Z}), Q_{X \# S^2 \times S^2})$ minden α automorfizmusához létezik egy olyan $f: X \# S^2 \times S^2 \rightarrow X \# S^2 \times S^2$ diffeomorfizmus, hogy $\alpha = f_*$.* \square

8.1.6. megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fenti érveléssel valójában minden $\varphi: H_2(\partial_+ V'_2; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\partial_- DV'_2; \mathbb{Z})$ izomorfizmusra kapunk egy olyan W_φ h -kobordizmust, mely éppen φ -t indukálja.

A 8.1.5 tétel bizonyítása algebrai és Kirby-kalkulus érvek érdekes kombinációja. Először az $\text{Aut}(H^2(X \# S^2 \times S^2; \mathbb{Z}), Q_{X \# S^2 \times S^2})$ automorfizmus-csoport egy alkalmas generátorrendszerét kell megtalálni, majd ezekre az automorfizmusokra látható be — Kirby-kalkulust alkalmazva —, hogy diffeomorfizmusokkal indukálhatók. A bizonyítás részletei Wall [W2] cikkében találhatók meg.

A magasabb dimenziós h -kobordizmus tétel bizonyítását imitálva megpróbáljuk a 3-fogantyúk ragasztó gömbjeit izotópiával úgy elmozdítani, hogy azok a megfelelő 2-fogantyúkkal elhagyható párokat alkossanak, és így belátni azt, hogy a W h -kobordizmus triviális. Jelölje tehát $A_i \subset \partial_+ W_2$ az i -edik 3-fogantyú ragasztási gömbjét, B_j pedig a j -edik 2-fogantyú övgömbjét. Tegyük fel, hogy $A_i \cdot B_j = \delta_{ij}$, vagyis a fogantyúk algebrailag elhagyható párokat alkotnak. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy $A_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$ esetén) és $A_i \cap B_i = \{\text{pt.}\}$, hiszen az algebrai metszet számításakor az ellentétes előjelű pontpárokat nem vettük figyelembe. Magasabb dimenzióban a Whitney trükk segítségével értük el, hogy az algebrai metszet egyenlő legyen a geometriaiával, amiből a h -kobordizmus tétel könnyen adódott. A 4-dimenziós esetben azonban több problémával is szembe kell néznünk.

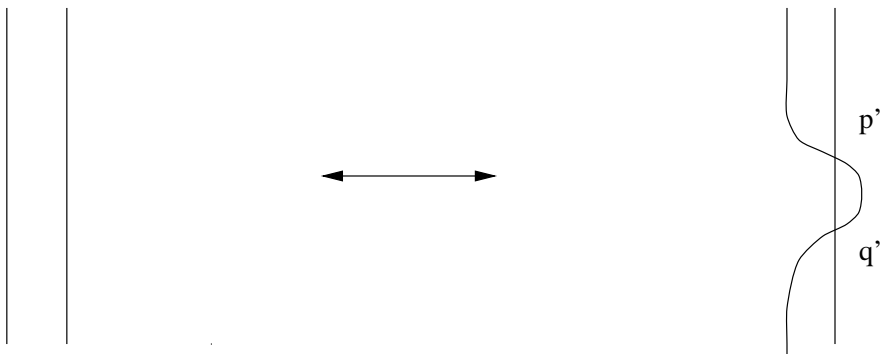
8.2 Casson tornyok és fogantyúk

Legyen tehát $p, q \in A_i \cap B_j$ és tegyük fel, hogy p és q ellentétes előjelűek. Vegyük a nekik megfelelő $C_{p,q}$ Whitney kört, vagyis kössük össze p -t és q -t A_i -ben és B_j -ben, majd vegyük e két görbe által alkotott kört. Hasonlóan a magasabb dimenziós esethez, B_j -k komplementuma (ill. A_i -k komplementuma) egyszeresen összefüggő lesz, az azonban nem világos, miért lesz $C_{p,q}$ a $\partial_+ W_2 - (\cup A_i \cup B_j)$ térben ponttrahúzható.

8.2.1. feladat. Lássuk be, hogy $\pi_1(\partial_+ W_2 - (\cup_{i=1}^n A_i)) = \pi_1(\partial_+ W_2 - (\cup_{j=1}^n B_j)) = 1$. (*Ötlet:* Lássuk be azt, hogy $\partial_+ W_2 - (\cup_{i=1}^n B_j)$ az $X_0 - \{\text{az } n \text{ darab } 2\text{-fogantyú ragasztási köre}\}$ térrel homeomorf; innen dimenzió okokból következik az egyszeres összefüggőség. Hasonló érvelés (a duális felbontásra) adja, hogy $\pi_1(\partial_+ W_2 - (\cup_{i=1}^n A_i)) = 1$.)

8.2.2. lemma. (Casson) *Esetleg további $p', q' \in A_i \cap B_j$ ellentétes előjelű metszéspontokat bevezetve (vagyis B_j -ket megfelelő izotópiával mozgatva) elérhető, hogy $\pi_1(\partial_+ W_2 - (\cup_i A_i \cup_j B_j)) = 1$.* \square

8.2.3. megjegyzés. Casson fenti lemmája látszólag eredeti célunk ellen működik, hiszen az újabb (ellentétes előjelű) metszéspontok bevezetésével növeljük az algebrai és geometriai metszetszám közti különbséget. Ez az az ár, amit a gömbök komplementumának egyszeres összefüggőségéért (mely a gondolatmenet kezdetéhez szükséges) fizetnünk kell. A 8.2.2 lemma bizonyítása [C] és [K2] könyvekben található meg; a fő ötlet a következő: alkalmas (a 8.1 ábrán bemutatott) izotópiával — és p', q' metszéspontok bevezetésével — a $\pi_1(\partial_+ W_2 - (\cup A_i \cup B_j))$ fundamentális csoport generátorai sorban megölhetők.



8.1 ábra: Egy Casson-féle izotópia

Végezzük el tehát a szükséges izotópiákat, a (p_k, q_k) ellentétes előjelű metszéspontokra vegyük a megfelelő Whitney köröket, és rögzítsünk diszjunkt $D_k \rightarrow \partial_+ W_2 - (\cup A_i \cup B_j)$ immertált Whitney diszkeket. Amennyiben D_k beágyazott, a Whitney trükk alkalmazható. Az $n = 4$ esetben azonban a D_k diszkekről nem tehető fel, hogy beágyazottak; azt azonban feltehetjük, hogy csak véges sok dupla pontot tartalmazó immerzióval vannak $\partial_+ W_2 - (\cup A_i \cup B_j)$ -ba beképezve. (A diszjunkttság eléréséhez valójában esetleg további dupla pontokat kell bevezetni a diszkeken; Casson fenti lemmája értelmében így elérhető, hogy a már rögzített diszkek komplementuma is egyszerűen összefüggő maradjon.) A Whitney diszkek dupla pontjainak eltüntetéséhez újabb Whitney köröket és újabb immertált Whitney diszkeket vezetünk be, melyek komplementumát Casson lemmáját alkalmazva egyszerűen összefüggővé tehetjük, majd az eljárást tovább ismétljük. Az m -edik lépés után ilymódon minden eredeti $C_{p,q}$ Whitney körre egy m magasságú $CT_{p,q}^m$ Casson tornyot definiáltunk. Rögzített p, q -ra vegyük ezek $\cup_m CT_{p,q}^m$ unióját, és hagyjuk el a határ azon részét, melyet nem ragasztottunk az első lépésben $C_{p,q}$ egy környezetéhez. Az így kapott $CH_{p,q}$ topologikus teret Casson fogantyúnak hívjuk. A következő alapvető eredmény a fent leírt Casson fogantyú topológiáját adja meg; ezen tétel alapján bizonyítható be a 4-dimenziós topologikus h -kobordizmus tétel. A 8.2.4 tétel bizonyítása rendkívül bonyolult, mind terjedelmében mind mélységében messze túlnyúlik jelen jegyzetünk keretein. (A bizonyítás megtalálható például Freedman eredeti cikkében [F], valamint a [FQ], [K2] könyvekben.)

8.2.4. tétel. (Freedman, [F]) *A fent leírt módon elkészített $(CH, \partial CH)$ Casson fogantyú (a megmarad határral) a $(D^2 \times D^2, \partial D^2 \times D^2)$ 2-fogantyúval, mint téppárral homeomorf.* \square

Következésképp topologikusan minden $C_{p,q}$ Whitney körre található egy Whitney diszk, így a magasabb dimenziós h -kobordizmus tétel bizonyítását elismételve azt kapjuk, hogy W homeomorf $X_0 \times I$ -vel. (Hiszen topologikus izotópiákat alkalmazva a megfelelő Whitney trükkök elvégezhetőek, tehát — topologikus változtatások után — a geometriai és algebrai metszetszámok egyenlővé tehetőek.) Következésképp h -kobordáns 4-sokaságokról beláttuk, hogy homeomorfak. Ebből adódóan megkapjuk Freedman 4.1.2 tételének egy speciális (de nagyon fontos) esetét:

8.2.5. tétel. *Két egyszerűen összefüggő, sima, zárt 4-sokaság pontosan akkor homeomorf, ha metszetformáik izomorfak.* \square

Mivel a fenti 8.2.4 Tétel nem garantál diffeomorfizmust, W nem feltétlenül diffeomorf $X_0 \times I$ -vel. A fenti érvelés egy (egyszerű) részét elismételve azonban a következő, a sokaságok sima struktúrájára vonatkozó (sokkal gyengébb) eredményt kaphatunk:

8.2.6. tétel. ([CFHS]) *A (W, X_0, X_1) h -kobordizmusnak létezik egy olyan (V, U_0, U_1) rész- h -kobordizmusa (ami a peremen triviális), melyre U_i pontrahúzható része X_i -nek és a $(W - \text{int } V, X_0 - \text{int } U_0, X_1 - \text{int } U_1)$ hármas a triviális h -kobordizmus, azaz mint hármas diffeomorf $X_0 - \text{int } U_0 \times I$ -vel.* \square

Ilymódon tehát 4-dimenziós sokaságok közötti h -kobordizmusok egy pontrahúzható részt leszámítva triviálisak — ez a pontrahúzható rész azonban meglehetősen komplikált lehet.

8.3 Egzotikus \mathbb{R}^4 -ek

A 4-dimenziós topológia talán legmeglepőbb eredménye egzotikus \mathbb{R}^4 -ek létezésének bizonyítása.

8.3.1. definíció. Az X sima 4-dimenziós sokaság egy *egzotikus* \mathbb{R}^4 , ha X homeomorf de nem diffeomorf a standard euklideszi \mathbb{R}^4 -gyel.

Hasonlóan definiálhatnánk egzotikus \mathbb{R}^n -t minden n -re, ilyenek azonban $n \neq 4$ esetén nem léteznek, hiszen egy klasszikus eredmény szerint:

8.3.2. tétel. Ha az X sima n -dimenziós sokaság \mathbb{R}^n -nel homeomorf és $n \neq 4$, akkor X és \mathbb{R}^n diffeomorfak. \square

A következőkben — egy későbbi eredményt és Freedman fenti alapvető eredményét (8.2.4 tétel) felhasználva — a következő egzisztencia-tételt fogjuk belátni.

8.3.3. tétel. Létezik egzotikus \mathbb{R}^4 .

8.3.4. megjegyzések. Az első egzotikus \mathbb{R}^4 megtalálása után hamar kiderült, hogy rengeteg ilyen sokaság van. A következők igazak például (a teljesség igénye nélkül):

- (a) A sík minden rögzített (x, y) pontjához hozzárendelhetünk kontinuum sok, páronként nem diffeomorf egzotikus \mathbb{R}^4 -et; a sík különböző pontjaihoz tartozó egzotikus \mathbb{R}^4 -ek sem diffeomorfak.
- (b) A standard \mathbb{R}^4 nyílt részhalmazaként kontinuum sok egzotikus \mathbb{R}^4 áll elő.
- (c) Az \mathbb{R}^2 síknak létezik a standard \mathbb{R}^4 -be olyan sima beágyazása, mely mentén dupla elágazó fedést véve az eredmény egy egzotikus \mathbb{R}^4 lesz.

Az előadás hátralevő részében a 8.3.3 tétel bizonyítását vázoljuk majd. Legyen tehát W egy h -kobordizmus (egy később meghatározandó) X_0 és X_1 térpár között. Ha találunk olyan X_0, X_1 párt, melyek nem diffeomorfak (de homeomorfak), akkor W simán nem (csak topologikusan) triviális.

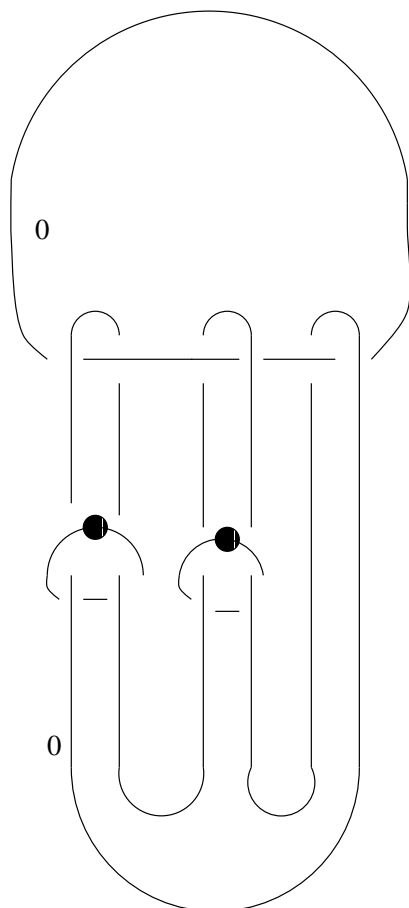
8.3.5. tétel. (Lásd még 10.2.7 következményt.) Legyen X_0 a korábban megismert $K3$ -felület felfújta, X_1 pedig $3\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 20\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Ekkor $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$ (így X_0 és X_1 h -kobordásnak), de X_0 és X_1 nem diffeomorfak (tehát a h -kobordizmus simán nem triviális).

A $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$ állítás könnyen következik a korábbiakból. Ahhoz, hogy belássuk, X_0 és X_1 nem diffeomorfak, Seiberg-Witten invariánsok (részleges) kiszámítására van szükség (lásd a 10. előadást).

Vegyünk tehát egy W h -kobordizmust X_0 és X_1 között, és végezzük el az eddig tanult egyszerűsítéseket — vagyis tegyük fel, hogy W fogantyú-felbontásában csak 2- és 3-fogantyúk szerepelnek, és $\partial_+ W_2$ -ben a ragasztó és övgömbök extra metszéspont-párjaira odaragasztottuk a megfelelő Casson fogantyúkat. Extra önátmetszések bevezetésével feltehető, hogy a fenti Casson fogantyúk mind diffeomorfak egymással. Feltehető továbbá az is, hogy az öv- és ragasztási gömbök szimmetrikusan metszik egymást, vagyis az i -edik öv és a j -edik ragasztási gömb geometriai metszete megegyezik a j -edik öv és az i -edik ragasztási gömb geometriai metszetével. Legyen U a ragasztási és övgömbök uniójának kis környezete, V pedig U és a fenti Casson fogantyúk uniója. Evvel $\partial_+ W_2$ egy V nyílt részét kapjuk; ehhez a megfelelő 3-fogantyúkat ragasztva — vagyis a ragasztási gömbök mentén mütve — X_1 -nek egy R_1 nyílt, míg az övgömbök mentén mütve X_0 -nak egy R_0 nyílt része adódik. A fenti szimmetria miatt könnyen látható, hogy R_0 és R_1 diffeomorfak.

8.3.6. tétel. Az R_0 sokaság nem diffeomorf \mathbb{R}^4 -gyel.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy R_0 diffeomorf \mathbb{R}^4 -gyel. Legyen az $\bar{U} \subset V$ rész mütét utáni képe R_0 -ban C . Mivel C kompakt, az $R_0 \cong \mathbb{R}^4$ feltevésből adódóan létezik egy olyan D_0^4 simán beágyazott zárt diszk, mely C -t tartalmazza. Ennek S^3 pereme már C -n kívül van, ahol pedig h -kobordizmusunk már triviális. Ilymódon ez a perem megjelenik X_1 -ben is, mint a D_0^4 -en végrehajtott mütétek képe. Mivel ez is egy D^4 , a W kobordizmust a fenti diszkek felett a triviálisra cserélve egy X_0 és X_1 közötti triviális h -kobordizmust találtunk, ami azt jelenti,



8.2 ábra: Metsző gömbök környezete egy 4-sokaságban

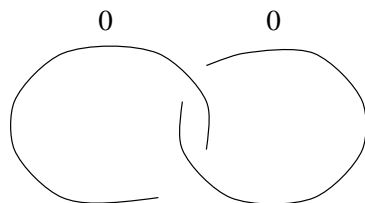
hogy X_0 és X_1 diffeomorf 4-sokaságok. Ez azonban ellentmond X_0 és X_1 választásának, következésképp R_0 nem diffeomorf \mathbb{R}^4 -gyel. \square

Freedman tétele szerint azonban egy Casson fogantyú mindig homeomorf a $(D^2 \times D^2, \partial D^2 \times D^2)$ 2-fogantyúval, vagyis a topologikus Whitney trükk elvégezhető, tehát homeomorfia erejéig feltehető, hogy a ragasztó és övgömbök geometrikusan is δ_{ij} szerint metszik egymást. Ekkor azonban a műtétek V -t egy \mathbb{R}^4 -gyé alakítják, vagyis R_0 (és persze így R_1 is) homeomorf \mathbb{R}^4 -gyel.

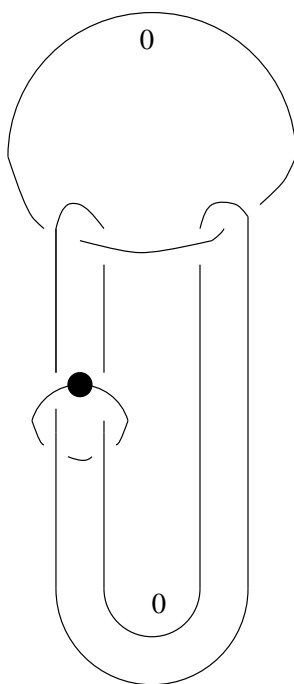
8.3.7. következmény. Az R_0 4-sokaság egy egzotikus \mathbb{R}^4 . \square

8.3.8. megjegyzés. Valójában a legegyszerűbb eset — amikor egyetlen ragasztó és övgömb van csak $\partial_+ W_2$ -ben, azok 3 pontban metszik egymást, és a Casson fogantyú minden szintjén csak egyetlen (pozitív) önátmetszésű Whitney diszk van — már egzotikus \mathbb{R}^4 -et ad [BG].

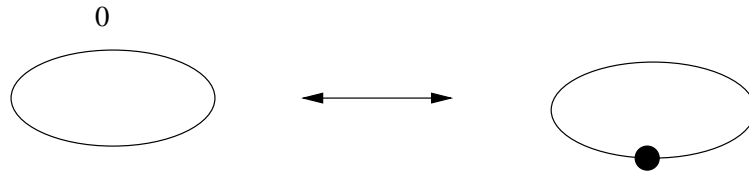
8.3.9. feladatok. (a) Tegyük fel, hogy $S_1, S_2 \subset X$ beágyazott gömbök három (két pozitív és egy negatív előjelű) pontban metszik egymást. Lássuk be, hogy a 8.2 ábra az $S_1 \cup S_2 \subset X$ unió $\nu(S_1 \cup S_2)$ csőszerű környezetének egy Kirby diagramját adja meg. (Ötlet: Ha $S_1 \cap S_2$ egyetlen pontból áll, akkor könnyen látható, hogy $\nu(S_1 \cup S_2)$ -t a 8.3 ábra Kirby diagramja adja meg. Újabb metszéspontot a következő módon vezethetünk be: legyenek $D_i \subset S_i$ diszkek, $D_i \times D^2 \subset \nu S_i$ pedig triviális részek a normálnyalábokban ($i = 1, 2$). $D_1 \times D^2$ -t $D_2 \times D^2$ -vel egy, a fibrumot a bázissal felcserélő diffeomorfizmussal összeragasztva éppen a megfelelő teret kapjuk — ennek egy Kirby diagramját mutatja be a 8.4 ábra. Az eljárást ismételve a feladat megoldását kapjuk.)



8.3 ábra: Két, egymást egy pontban metsző gömb környezetének Kirby diagramja

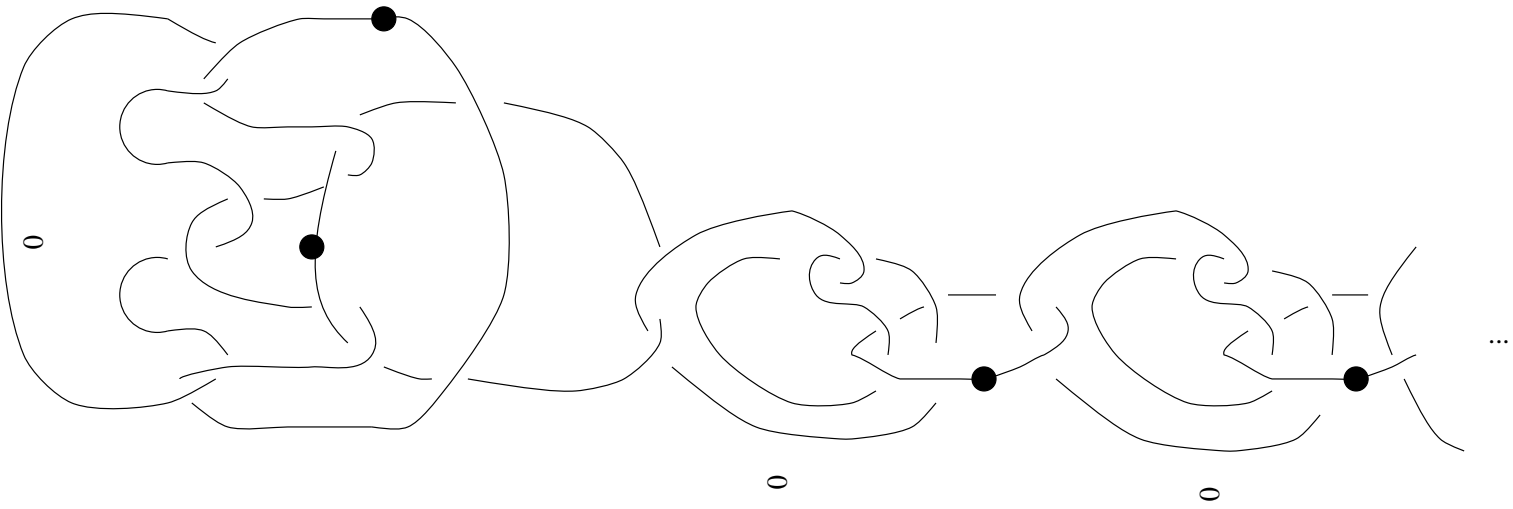


8.4 ábra: Új metszéspont bevezetése



8.5 ábra: Műtét hatása egy Kirby diagramon

- (b) Bizonyítsuk be, hogy egy 1-fogantyú kiműtése a megfelelő Kirby diagramban a pontozott kör pontjának 0 tűskézésre való cseréjét jelenti; és fordítva, egy 0 tűskézésű triviális csomó által adott gömböt kiműtve az új diagram a régitől pusztán a 0 tűskézés pontra való cseréjét jelenti, lásd a 8.5 ábrát.
- (c) Lássuk be, hogy a fenti $\nu(S_1 \cup S_2)$ sokasághoz (lásd 8.2 ábrát) a Whitney kör mentén egy 2-fogantyút ragasztva majd S_1 (vagy S_2) menti műtétet végrehajtva \mathbb{R}^4 -et kapjuk. Mivel Freedman tétele szerint egy Casson fogantyú egy 2-fogantyúval homeomorf, a feladat éppen azt mutatja meg, hogy R_0 homeomorf \mathbb{R}^4 -gyel. A 8.6 ábra egy egzotikus \mathbb{R}^4 Kirby diagramját adja meg — lásd [BG].



8.6 ábra: Egy egzotikus \mathbb{R}^4 Kirby diagramja

9. előadás

Spin és spin^c struktúrák

Mint azt látni fogjuk, 4-dimenziós sokaságok sima struktúráinak vizsgálatában az eddig tanultaktól teljesen eltérő, jórészt differenciálgeometriai és analitikus eszközök használhatók. Először az alapvető definíciókat fogjuk ismertetni, majd rátérünk egy diffeomorfizmus-invariáns, a Seiberg-Witten függvény definíciójára.

9.1 Spin struktúrák

Legyen X irányítható 4-dimenziós Riemann-sokaság. Ekkor a $TX \rightarrow X$ érintőnyaláb struktúra-csoportja $SO(4)$ -re redukálódik, mely összefüggő, kompakt Lie-csoport és $\pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$. Fizikai motivációk alapján vetődik fel az a kérdés, mi módon tehetnénk a struktúra-csoportot egyszerűen összefüggővé. (Ismert, hogy minden G kompakt Lie-csoportra $\pi_2(G) = 1$, így $\pi_1(G) = 1$ esetén G alacsony dimenziós homotópia- és homológia-csoportjai eltűnnek.)

Emlékezzünk vissza, hogy $SO(2) \cong U(1) = S^1$, és ha $SU(2)$ jelöli azon 2×2 unitér mátrixok csoportját, melyek determinánsa 1, akkor — a fentiekhez hasonlóan — $SU(2) \cong S^3 = Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$ (az egységnyi hosszúságú kvaterniók csoportja). A $\varphi(q_+, q_-)x = q_+xq_-^{-1}$ definícióval ($x \in \mathbb{H}$, $q_{\pm} \in SU(2)$), a szorzás pedig kvaternió-szorzás) egy $\varphi: SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$ leképezés adható meg. Egyszerű számolás mutathatja, hogy φ egy epimorfizmus, melynek magját (I, I) és $(-I, -I)$ alkotják. Mivel $\pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$ és $SU(2) \times SU(2)$ egyszerűen összefüggő, ez a csoport éppen $SO(4)$ univerzális fedése.

9.1.1. definíció. Az $SU(2) \times SU(2)$ csoportot a 4-dimenziós $Spin(4)$ spin csoportnak nevezzük; a két vetítés által kapott μ_{\pm} komplex 2-dimenziós reprezentáció pedig $Spin(4)$ két spinor reprezentációja.

9.1.2. megjegyzés. A fentiekhez hasonlóan definiálható a $Spin(3)$ 3-dimenziós spin csoport is, mely tehát (mint $SO(3)$ univerzális fedése) $SU(2)$ -vel izomorf. Vegyük azonban észre, hogy ekkor csak egy spinor reprezentáció adódik. Valójában minden $n \geq 3$ -ra (amikor is $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$) az n -dimenziós $Spin(n)$ spin csoport (mint $SO(n)$ univerzális fedése) definiálható, $Spin(n)$ -nek páros n esetén két, páratlan n esetén egy kanonikus (ún. spinor) reprezentációja van.

A továbbiakban jelölje $P_{SO(4)} \rightarrow X$ a $TX \rightarrow X$ érintőnyalábhöz tartozó principális $SO(4)$ -nyalábot.

9.1.3. definíció. A $P_{Spin(4)} \rightarrow X$ principális $Spin(4)$ -nyalábot *spin struktúrának* hívjuk az X 4-sokaságon, ha létezik egy olyan $P_{Spin(4)} \rightarrow P_{SO(4)}$ kettős fedés, mely nyalábleképezés (azaz fibrumot fibrumba képez) és fibrumonként a $\varphi: Spin(4) \rightarrow SO(4)$ kettős fedést adja; vagyis ha $P_{Spin(4)} \times_{\varphi} SO(4) = P_{SO(4)}$. A $P_{Spin(4)}$ és a $Q_{Spin(4)}$ spin struktúrák izomorfak, ha létezik egy olyan $f: P_{Spin(4)} \rightarrow Q_{Spin(4)}$ nyaláb-izomorfizmus, mely a kettős fedésekkel kommutatív diagramot alkot.

9.1.4. tétel. Az X^4 irányított Riemann-sokaságon pontosan akkor létezik spin struktúra, ha $w_2(X) = 0$. Ekkor a különböző spin struktúrák terén a $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ csoport szabadon és tranzitívan hat.

Bizonyítás. Legyen $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset X_4 = X$ a 4-sokaság egy cella-felbontása. Akadály-elmélettel belátható, hogy $w_2(X) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha a $TX|_{X_2}$ megszorított nyaláb triviális. (Itt X_2 a legfeljebb 2-dimenziós cellák uniója.) Mivel $\pi_1(Spin(4)) = 1$, egy $P_{Spin(4)} \rightarrow X$ nyaláb mindig triviális X_2 felett; a trivitalitást mutató szelés képe a $P_{Spin(4)} \rightarrow P_{SO(4)}$ fedésnél éppen azt adja, hogy $P_{SO(4)}|_{X_2}$ is triviális. Következésképp egy spin struktúra létezés magával vonja $w_2(X) = 0$ -t.

Megfordítva, ha $w_2(X) = 0$, akkor $P_{SO(4)}|_{X_2}$ triviális, így a 2-váz felett könnyedén megadható a $P_{Spin(4)}|_{X_2} \rightarrow P_{SO(4)}|_{X_2}$ kettős fedés. Ahhoz, hogy ezt a fedést a magasabb dimenziós cellák fölé kiterjesszük, az $S^{k-1} \rightarrow SO(4)$ ($k \geq 3$) ragasztó-leképezéseket (melyek az e_k k -cella feletti $e_k \times SO(4)$ triviális nyalábot ragasztják az alacsonyabb cellák felett már megadott nyalábhoz) kell egy $S^{k-1} \rightarrow Spin(4)$ leképezéssé felemelni. Mivel a $\rho: Spin(4) \rightarrow SO(4)$ kettős fedés egy $\rho_*: \pi_k(Spin(4)) \rightarrow \pi_k(SO(4))$ izomorfizmust indukál $k \geq 2$ esetén, a fenti felemelés nyilván megtehető. Evvel tehát beláttuk, hogy $w_2(X) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha X -en létezik spin struktúra. (Ebben az esetben, helytelenül, X -et spin sokaságnak is szokás nevezni — a spin sokaság elnevezés magában foglal egy rögzített spin struktúrát is.) A különböző spin struktúrák $P_{SO(4)}|_{X_2}$ különböző trivializációinak felelnek meg, ezeket pedig $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ paraméterezi, hiszen két spin struktúra két trivializációt ad X_2 felett, melyek egy $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ -beli elemben különböznek. \square

9.1.5. következmény. *Ha X spin, akkor a Q_X metszetforma páros. Ha Q_X páros és X egyszeresen összefüggő, akkor X spin. (Létezik azonban olyan nemspin sokaság, melynek metszetformája páros; természetesen ennek a sokaságnak nemtriviális a fundamentális csoportja.)*

Bizonyítás. Mivel $\langle w_2(X), \alpha \rangle \equiv \langle \alpha, \alpha \rangle \pmod{2}$ minden $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ -re (5.2.9(b) feladat), $w_2(X) = 0$ -ból Q_X párossága következik. Ha $\pi_1(X) = 1$, akkor a $H_2(X; \mathbb{Z})$ homológia csoportban nincsen torzió, így ha $\langle w_2(X), \alpha \rangle = 0$ minden α -ra, akkor $w_2(X) = 0$. Ha $H_2(X; \mathbb{Z})$ -ben van páros rendű elem, akkor a fenti érvelés nem helyes — és valóban, létezik olyan nemspin (\mathbb{Z}_2 fundamentális csoportú) 4-sokaság, melynek metszetformája páros. (A fenti bizonyításban α jelölte az egész együtthatós homológia elem mod 2 redukcióját is.) \square

9.1.6. megjegyzés. A spin struktúra fenti leírásához analóg módon lehet egy X sokaság irányíthatóságát megadni. Az X sokaság pontosan akkor irányítható, ha a $TX \rightarrow X$ érintőnyaláb az X_1 1-váz felett triviális; egy irányítást pedig $TX|_{X_1}$ egy trivializációja ad meg. Hasonlóan az eddigiekhez, $TX|_{X_1} \rightarrow X_1$ pontosan akkor triviális, ha $w_1(X) = 0$, továbbá X különböző irányításait $H^0(X; \mathbb{Z}_2)$ paraméterezi. Ebben az értelemben tehát a spin tulajdonság az irányíthatóság általánosításának tekinthető. A spin struktúra fenti definíciója valójában tetszőleges n dimenziós sokaságokra kiterjeszthető; a 9.1.4 tételt általánosítva kapjuk, hogy egy X^n irányított n -dimenziós Riemann-sokaságon pontosan akkor van spin struktúra, ha $w_2(X) = 0$.

9.1.7. feladat. Lássuk be, hogy ha egy $F \rightarrow M$ valós vektornyalábra $w_1(F) = w_2(F) = 0$ teljesül, akkor $w_3(F) = 0$. (Ily módon tehát a fenti analógiát követve az irányíthatóság és a spin tulajdonság nem általánosítható.)

Legyen A a Levi-Civita konnexiónak megfelelő $Lie(SO(4)) = Lie(Spin(4)) = Lie(SO(3)) \oplus Lie(SO(3))$ -értékű 1-forma $P_{SO(4)}$ -en, és húzzuk ezt vissza $P_{Spin(4)}$ -re. Ekkor tehát $P_{Spin(4)}$ -en kapunk egy \hat{A} konnexiót, mely minden asszociált nyalábon, így speciálisan az $S^\pm = P_{Spin(4)} \times_{\mu^\pm} \mathbb{C}^2$ 2-dimenziós hermitikus komplex (vagyis kvaternió vonal) spinor nyalábokon is egy kovariáns deriválást indukál. Jelölje $\nabla: \Gamma(S^\pm) \rightarrow \Gamma(S^\pm \otimes T^*X)$ ezt a kovariáns deriválást. Az adott metrikával T^*X azonosítható TX -szel, így $\nabla: \Gamma(S^\pm) \rightarrow \Gamma(S^\pm \otimes TX)$.

9.1.8. megjegyzés. A fenti okfejtésben többször is használtuk azt a jólismert tényt, hogy egy konnexió akár a principális nyalábon definiált Lie-algebra értékű 1-formaként, akár az asszociált vektornyalábon definiált kovariáns deriválásként is megadható. A fenti két megadási mód közötti kapcsolatot a párhuzamos eltolás adja meg.

9.1.9. definíció. (a) A $P_{Spin(4)} \rightarrow X$ spin struktúra definíció szerint egy $TX \cong P_{Spin(4)} \times_{\rho} \mathbb{R}^4$ izomorfizmust jelent. Másrészt ρ definíciója azt mutatja, hogy $P_{Spin(4)} \times \mathbb{H} = S^+ \otimes_{\mathbb{H}} (S^-)^* \cong Hom_{\mathbb{H}}(S^+, S^-)$. Következésképp egy spin struktúra rögzítésével egy $C: TX \rightarrow Hom_{\mathbb{H}}(S^+, S^-)$ (ill. $C^*: TX \rightarrow Hom_{\mathbb{H}}(S^-, S^+)$) izomorfizmust kapunk, amit *Clifford szorzásnak* nevezünk. Könnyen látható, hogy erre $C^*(v)C(v) = -|v|^2 Id_{S^\pm}$ teljesül. A fenti leképezésekből $\Gamma(S^+ \otimes TM) \rightarrow \Gamma(S^-)$ illetve $\Gamma(S^- \otimes TM) \rightarrow \Gamma(S^+)$ leképezések nyerhetők — melyeket továbbra is C -vel illetve C^* -gal fogunk jelölni.

(b) A $C \circ \nabla = \not\partial: \Gamma(S^+) \rightarrow \Gamma(S^-)$ kompozíciót az adott spin struktúrához tartozó $\not\partial$ Dirac operátornak nevezzük.

9.1.10. feladat. Lássuk be, hogy egy X 4-dimenziós sokaságra az $S^\pm \rightarrow X$ $SU(2)$ -nyalábok és a $C: TX \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{H}}(S^+, S^-)$ izomorfizmus (mely a $C^*(v)C(v) = -|v|^2 \text{Id}_{S^+}$ azonosságot is teljesíti) megadása egy spin struktúrát határoz meg. (Ötlet: Az S^\pm nyalábokhoz tartozó P^\pm principális $SU(2)$ -nyalábok segítségével egy P principális $Spin(4)$ -nyaláb kapható — emlékezzünk arra, hogy $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$. A C izomorfizmus éppen azt mutatja, hogy $P \times_\varphi SO(4) = P_{SO(4)}$, vagyis P egy spin struktúra.)

9.1.11. megjegyzések. (a) A fenti $\not\partial$ Dirac operátor a Riemann-geometria egyik legtöbbet vizsgált objektuma. Hasonló definícióval tetszőleges n dimenziós spin sokaságra a megfelelő Dirac operátor definiálható, melynek sok fontos és érdekes tulajdonsága van. Belátható például, hogy $\text{Ker } \not\partial = \{\phi \in \Gamma(S^+) \mid \not\partial\phi = 0\}$ és $\text{Coker } \not\partial = \Gamma(S^-)/(\text{Im } \not\partial)$ véges dimenziós vektorterek, és $n = 4$ esetén $\text{ind } \not\partial = \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \not\partial - \dim_{\mathbb{C}} \text{Coker } \not\partial = \frac{1}{8}\sigma(X)$; vagyis ekkor az operátor indexe egy egyszerű topológiai invariánssal egyezik meg.

(b) Belátható továbbá, hogy $\text{Ker } \not\partial$ és $\text{Coker } \not\partial$ valójában kvaternió modulusok, így komplex dimenzióik párosak, vagyis $\frac{1}{8}\sigma(X) \equiv 0 \pmod{2}$. Ez pedig bebizonyítja Rokhlin tételét (4.1.5 tétel), mely szerint egy X spin sokaságra a $\sigma(X)$ szignatúra 16-tal osztható.

(c) Legyen $\nabla^*: \Gamma(S^\pm \otimes T^*X) \rightarrow \Gamma(S^\pm)$ a spinor nyalábon értelmezett (és a Levi-Civita konnexió által indukált) ∇ kovariáns deriválás L^2 adjungáltja. Ha $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ jelöli az X Riemann-sokaság skalárgörbületét, akkor $\psi \in \Gamma(S^+)$ -ra

$$\not\partial^* \not\partial \psi = \nabla^* \nabla \psi + \frac{1}{4} s \psi$$

teljesül. Ezt az egyenlőséget *Weitzenböck formulának* hívják; hasonló teljesül $\phi \in \Gamma(S^-)$ esetén is: $\not\partial \not\partial^* \phi = \nabla^* \nabla \phi + \frac{1}{4} s \phi$.

(d) Egy M irányított 3-sokaságra hasonlóan definiálhatunk spin struktúrát: ez egy olyan $P_{SU(2)} \rightarrow M$ nyaláb tehát, melyre $P_{SU(2)} \times_\psi SO(3) = P_{SO(3)}$ (ahol $\psi: SU(2) \rightarrow SO(3)$ adja a kettős fedést). Az S spinor nyaláb és a $\not\partial$ Dirac operátor definíciója is analóg a fentiekkel. Mivel $\pi_2(SO(3)) = \pi_2(SU(2)) = \pi_2(Spin(3)) = 1$, egy spin struktúra valójában trivialisálja a $TM \rightarrow M$ érintőnyalábot. Másrészt $w_1^2(M) = w_2(M)$ egy M 3-sokaságra, így egy irányított 3-sokaság mindig ellátható spin struktúrával, és $TM \cong M \times \mathbb{R}^3$.

(e) A definíció valójában bármilyen X sima sokaságra és $F \rightarrow X$ $SO(n)$ -nyalábra kiterjeszhető, és belátható hogy F -en pontosan akkor van spin struktúra, ha $w_2(F) = 0$; továbbá hogy a különböző spin struktúrákat éppen $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ paraméterezi. (A bizonyítás a 9.1.4 tétel bizonyításában megadott gondolatmenet egyszerű általánosításával adható meg.)

9.2 Spin^c struktúrák

Az ígért sima invariánsok definíciójához a spin struktúrák következő általánosítására van szükségünk.

9.2.1. definíció. Legyen $Spin^c(4) = SU(2) \times SU(2) \times S^1 / \langle (-I, -I, -1) \rangle$ 7-dimenziós Lie-csoport. A következő leképezések a definícióból természetesen adódnak: $(q_+, q_-, z) \in SU(2) \times SU(2) \times S^1$ -re legyen $\alpha(q_+, q_-, z) = [q_+, q_-, z]$ egy $\alpha: Spin(4) \times S^1 \rightarrow Spin^c(4)$ homomorfizmus, $\rho[q_+, q_-, z] = ([q_+, q_-], z^2)$ pedig egy $\rho: Spin^c(4) \rightarrow SO(4) \times S^1$ kettős fedés; a fenti ρ -t az első faktorra való vetítéssel kapjuk a $\rho_0: Spin^c(4) \rightarrow SO(4)$ principális S^1 -nyalábot; végül $\lambda[q_+, q_-, z] = z^2$ egy $\lambda: Spin^c(4) \rightarrow S^1$ leképezést (ρ második faktorra való vetítését) ad.

9.2.2. feladatok. (a) Lássuk be, hogy $U(2) = SU(2) \times S^1 / \langle (-I, -1) \rangle$.

(b) Lássuk be, hogy $SO(4)$ felett egyetlen nem triviális S^1 -fibrálás létezik (és ez éppen a fenti ρ_0). (Ötlet: Vegyük észre, hogy $SO(4)$ homeomorf az $S^3 \times \mathbb{R}P^3$ szorzattal; számítsuk ki $H^2(SO(4); \mathbb{Z})$ -t.)

- (c) Bizonyítsuk be, hogy $Spin^c(4)$ az $\{(A, B) \mid A, B \in U(2), \det A = \det B\}$ csoporttal izomorf. Adjuk meg az így nyert $\mu_{\pm}: Spin^c(4) \rightarrow U(2)$ vetítéseket az eredeti $[q_+, q_-, z] \in SU(2) \times SU(2) \times S^1/\mathbb{Z}_2$ alakban felírva. (Ötlet: Az $(A, B) \in U(2) \times U(2)$ elemre és $z^2 = \det(A)$ komplex számra vegyük a $[z^{-1}A, z^{-1}B, z] \in Spin^c(4)$ elemet; az így megadott leképezésről lássuk be, hogy csoport-izomorfizmus.)
- (d) Tekintsük $SO(4) \times S^1 = SO(4) \times SO(2)$ standard beágyazását $SO(6)$ -ba. Lássuk be, hogy $Spin^c(4) \rightarrow SO(4) \times S^1$ az egyetlen olyan kettős fedés, mely a $Spin(6) \rightarrow SO(6)$ kettős fedés megszorításaként áll elő.

9.2.3. definíció. Legyen X irányított 4-dimenziós Riemann-sokaság és legyen P_{S^1} egy komplex vonalnyaláb (S^1 struktúra-csoportú) principális nyalábja. Egy $P_{Spin^c(4)} \rightarrow X$ principális $Spin^c(4)$ -nyalábot P_{S^1} -*determinánsú spin^c struktúrának* hívunk, ha létezik egy olyan $P_{Spin^c(4)} \rightarrow P_{SO(4) \times S^1}$ nyaláb-leképezés, mely fibrumok mentén éppen a $\rho: Spin^c(4) \rightarrow SO(4) \times S^1$ kettős fedés. Tehát $P_{Spin^c(4)} \rightarrow X$ egy spin^c struktúra, ha $P_{Spin^c(4)} \times_{\rho_0} SO(4) \cong P_{SO(4)}$, és ekkor determinánsát a $P_{Spin^c(4)} \times_{\lambda} S^1$ nyaláb adja.

9.2.4. tétel. Az X 4-sokaságon pontosan akkor létezik P_{S^1} determinánsú spin^c struktúra, ha $c_1(P_{S^1}) \equiv w_2(X) \pmod{2}$. Ebben az esetben $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ szabadon és tranzitívan hat a P_{S^1} determinánsú spin^c struktúrák terén.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a P_{S^1} determinánsú spin^c struktúrák létezése (a 9.2.2(d) feladat szerint) avval ekvivalens, hogy a $P_{SO(4) \times S^1} SO(6)$ -nyalábon van-e spin struktúra. Mivel $w_2(P_{SO(4) \times S^1}) \equiv w_2(X) + c_1(P_{S^1})$, a tétel 9.1.11(e) alapján következik. \square

9.2.5. tétel. Minden 4-sokaságra létezik (valamilyen determinánsú) spin^c struktúra.

Bizonyítás. Legyen $R: H^*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ a mod 2 redukció által generált homomorfizmus. A fentiek szerint csupán azt kell belátni, hogy létezik olyan $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$ elem, melynek mod 2 redukciója éppen $w_2(X)$, vagyis hogy $w_2(X) \in \text{Im } R$.

9.2.6. lemma. Ha $a \in H^2(X; \mathbb{Z})$ és $w \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ párra $c(\alpha) \equiv w(R(\alpha)) \pmod{2}$ teljesül minden $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ elemre, akkor létezik egy olyan $c_0 \in H^2(X; \mathbb{Z})$ torzió elem, melyre $w = R(c + c_0)$.

Bizonyítás. Feltevésünk szerint $w - R(c) \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ az $f_2: H^2(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \text{Hom}(H_2(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2)$ leképezés ($f_2(x) = \{\alpha \mapsto x(\alpha)\}$) magjában van. Az univerzális együttható formula szerint az $\text{Ext}(H_1(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{g_2} H^2(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{f_2} \text{Hom}(H_2(X; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}_2)$ sorozat egzakt, tehát létezik egy olyan $\beta \in \text{Ext}(H_1(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2)$ elem, melyre $g_2(\beta) = w - R(c)$. Ismert, hogy ha G egy csoport és H egy olyan \mathbb{Z} -modulus, melyre $H = \mathbb{Z}/B$, akkor $\text{Ext}(H, G) = \text{Hom}(B, G)/\text{Hom}(Z, G)$. Ebből adódon a kézenfekvő $\text{Ext}(H_1(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{r} \text{Ext}(H_1(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2)$ (a mod 2 redukáló által indukált) homomorfizmus ráképezés. Következésképp létezik egy olyan γ elem $\text{Ext}(H_1(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ -ben, melyre $g_2(r(\gamma)) = w - R(c)$. Az univerzális együttható formula-beli $g: \text{Ext}(H_1(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$ leképezéssel $R \circ g = g_2 \circ r$ teljesül a diagramok kommutativitása miatt, így $c_0 = g(\gamma)$ választással a lemma következik. \square

Visszatérve a 9.2.5 tétel bizonyítására, csak arra kell emlékeznünk, hogy $w_2(X)(R(\alpha)) \equiv Q_X(\alpha, \alpha) \pmod{2}$ teljesül minden $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ elemre. Mivel az a $\varphi: H_2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ leképezés, melyet az $\alpha \mapsto Q_X(\alpha, \alpha) \pmod{2}$ formula definiál, egy homomorfizmus, létezik egy olyan $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$ hogy $\varphi(\alpha) = c(\alpha) \pmod{2}$ minden $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ -re. Ily módon az előző lemmát alkalmazva a tétel következik. \square

Az ismerttetett csoportazonosságokat és reprezentációkat használva $W^{\pm} = P_{Spin^c(4)} \times_{\mu^{\pm}} \mathbb{C}^2 U(2)$ -nyalábokat definiálhatunk — ezeket pozitív ill. negatív spinor nyaláboknak hívjuk. Vegyük észre, hogy $\det W^+ \cong \det W^-$. A spin esethez hasonlóan, egy $P_{SO(4) \times S^1}$ -en rögzített konnexió felhúzható $P_{Spin^c(4)}$ -re, ami a W^{\pm} asszociált nyalábokon kovariáns deriválást indukál. $P_{SO(4)}$ -en természetesen adódik a Levi-Civita konnexió, P_{S^1} -en azonban nincs ilyen természetes választás. Jelölje L a $\det W^+ \cong \det W^-$ komplex vonalnyalábot, \mathcal{A}_L pedig az L -en lévő S^1 -konnexiók (affin) terét.

9.2.7. definíció. Egy $A \in \mathcal{A}_L$ konnexió és a Levi-Civita konnexió segítségével $P_{SO(4) \times S^1}$ -en kapunk egy konnexiót, melyet visszahúzva $P_{Spin^c(4)}$ -re egy konnexiót, ebből pedig a $\nabla_A: \Gamma(W^\pm) \rightarrow \Gamma(W^\pm \otimes T^*X)$ indukált kovariáns deriválást kapjuk. T^*X -et TX -szel (a metrika segítségével) azonosítva feltehető, hogy $\nabla_A: \Gamma(W^\pm) \rightarrow \Gamma(W^\pm \otimes TX)$. Hasonlóan a spin esethez, a spin^c struktúra definíciójából következik, hogy $TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ és $W^+ \otimes_{\mathbb{C}} (W^-)^* = Hom_{\mathbb{C}}(W^+, W^-)$ izomorfak; az így kapott $C: T_{\mathbb{C}}X \rightarrow Hom(W^+, W^-)$ (ill. $C^*: T_{\mathbb{C}}X \rightarrow Hom(W^-, W^+)$) leképezést *Clifford szorzásnak* nevezzük. A korábbiakhoz hasonlóan származtassunk C -ből (ill. C^* -ből) egy $\Gamma(W^+ \otimes TM) \rightarrow \Gamma(W^-)$ (ill. $\Gamma(W^- \otimes TM) \rightarrow \Gamma(W^+)$) leképezést. A megfelelő fenti leképezések komponálásával a $\not\partial_A: \Gamma(W^\pm) \rightarrow \Gamma(W^\mp)$ *csavart Dirac operátort* kapjuk. A fenti $T^*X \cong TX$ azonosítást ismét alkalmazva $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 X$ egy η hatása definiálható $W = W^+ \oplus W^-$ -on: $\psi \in \Gamma(W)$ és $e_i^* \in \Lambda^1 X$ esetén $\eta(\sum_{i < j} \alpha_{ij} e_i^* \wedge e_j^*)(\psi) = \sum_{i < j} \alpha_{ij} C^*(e_i)(C(e_j)\psi)$. Könnyen látható, hogy $\eta|_{W^\pm} \subset W^\pm$, így $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 X$ az $\eta^\pm = \eta|_{W^\pm}$ hatással a W^\pm spinor nyalábokon hat.

9.2.8. feladatok. (a) A 9.1.10 feladathoz hasonlóan lássuk be, hogy egy spin^c struktúrát a $\det W^+ \cong \det W^-$ izomorfizmust teljesítő $W^\pm \rightarrow X$ $U(2)$ -nyalábok és a $C: T_{\mathbb{C}}X \rightarrow Hom(W^+, W^-)$ ($C^*(v)C(v) = -|v|^2 \text{Id}_{W^+}$ -et teljesítő) homomorfizmus meghatároz.

(b) Legyen (W^\pm, C) egy adott spin^c struktúra; egy tetszőleges $a \in H^2(X; \mathbb{Z})$ elemre pedig legyen $L_a \rightarrow X$ az a komplex vonalnyaláb, melyre $c_1(L_a) = a$. Lássuk be, hogy az $a \mapsto (W^\pm \otimes L_a, C \otimes \text{id}_{L_a})$ megfeleltetés egy bijekciót ad meg $H^2(X; \mathbb{Z})$ elemei és az X -en lévő spin^c struktúrák között. (Emlékezzünk arra, hogy egy X spin sokaság spin struktúráinak tere $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ -vel paraméterezhető — a megfeleltetés nem kanonikus. A fentiek szerint a spin^c struktúrák (szintén nem kanonikus módon) $H^2(X; \mathbb{Z})$ elemeinek feleltethetők meg.) Mi a $(W^\pm \otimes L_a, C \otimes \text{id}_{L_a})$ spin^c struktúra determináns nyalábja?

9.2.9. megjegyzések. (a) Észrevéve, hogy $U(2) = SU(2) \times S^1 / (-I, -1)$, tehát $U(2) \rightarrow SO(3)$ (az egyetlen nemtriviális S^1 -nyaláb $SO(3)$ felett, $Spin^c(3) = U(2)$ definícióval spin^c struktúrák az eddigiekkel analóg módon definiálhatók 3-sokaságokra is. Ekkor $W = P_{U(2)} \times \mathbb{C}^2$ az egyetlen spinor nyaláb; $w_2(M) = 0$ miatt pedig $c_1(P_{S^1}) \equiv 0 \pmod{2}$ könnyen megoldható.

(b) Vegyük észre, hogy egy spin struktúra a $Spin(4) \times S^1 \rightarrow Spin^c(4)$ (ill. $Spin(3) \times S^1 \rightarrow Spin^c(3)$) leképezéssel természetesen indukál egy (triviális determináns nyalábú) spin^c struktúrát.

(c) A spin esethez hasonlóan, egy rögzített spin^c struktúrára és $A \in \mathcal{A}_L$ konnexióra fennáll egy 9.1.11(c) megjegyzéshez hasonló reláció: $\psi \in \Gamma(W^+)$ esetén

$$\not\partial_A^* \not\partial_A \psi = \nabla_A^* \nabla_A \psi + \frac{1}{4} s \psi + \eta^+(F_A) \psi,$$

illetve $\phi \in \Gamma(W^-)$ esetén $\not\partial_A \not\partial_A^* \phi = \nabla_A^* \nabla_A \phi + \frac{1}{4} s \phi + \eta^-(F_A) \phi$. (Emlékezzünk, hogy ∇_A^* a ∇_A kovariáns deriválás L^2 adjungáltja; F_A jelöli az $A \in \mathcal{A}_L$ konnexió görbületét, mely tehát egy tisztán képzetes értékű 2-forma.)

(d) A spin esethez hasonlóan tetszőleges X sokaságra és F $SO(n)$ -nyalábra definiálható spin^c struktúra, és annak létezése éppen attól függ, $w_2(F)$ előáll-e egy egész együtthatós második kohomológia-osztály mod 2 redukciójaként.

10. előadás

4-sokaságok sima invariánsai

Ebben a befejező előadásban a Seiberg-Witten egyenletek és invariánsok definícióját, valamint legalapvetőbb tulajdonságait foglaljuk össze. Az állítások bizonyítása meglehetősen hosszadalmas előkészületeket igényelne, így azokra inkább hivatkozni fogunk. Az elmélet részletes tárgyalása a következő könyvekben található meg: [S], [KKM], [DK], illetve a hasonló témakört tárgyaló [SSz].

10.1 Seiberg-Witten egyenletek

A Seiberg-Witten egyenletek és invariánsok definiálásához a következő néhány definícióra van még szükségünk. Legyen X adott 4-dimenziós Riemann-sokaság; definiáljuk a $*$: $\Lambda^2 X \rightarrow \Lambda^2 X$ Hodge $*$ -operátort a következő formulával: legyen $*(e_i \wedge e_j) = e_k \wedge e_l$ ha $\{e_i, e_j, e_k, e_l\}$ ortonormált irányított bázisa $T_p^* X$ -nek, és terjesszük ki a definíciót lineárisan $\Lambda^2 X$ -re. Könnyen belátható, hogy $*^2 = \text{id}_{\Lambda^2 X}$.

10.1.1. definíció. Legyen $\Omega^\pm(X) = \{\omega \in \Omega^2(X) = \Gamma(\Lambda^2(X)) \mid *\omega = \pm\omega\}$. Mivel $*^2 = \text{id}_{\Lambda^2 X}$, könnyen látható, hogy $\Omega^2(X) = \Omega^+(X) \oplus \Omega^-(X)$ — $\omega^\pm = \frac{1}{2}(\omega \pm *\omega)$ -ra $\omega = \omega^+ + \omega^-$ és $\omega^\pm \in \Omega^\pm(X)$. Az $\Omega^+(X)$ vektortér elemeit *önduális*, $\Omega^-(X)$ elemeit pedig *anti-önduális (ASD) 2-formáknak* nevezzük. Vegyük észre, hogy a $*$ -operátor (és így az $\Omega^\pm(X)$ alterek) függnek az X -en választott metrikától.

10.1.2. feladat. Lássuk be, hogy $\eta^\pm(\Lambda_{\mathbb{C}}^\mp) = 0$, vagyis az önduális (ill. ASD) formák triviálisan hatnak W^- -on (ill. W^+ -on).

Belátható az is, hogy $\eta^+(\Lambda_{\mathbb{C}}^+) \subset \text{End}(W^+)$ éppen a nyom nélküli endomorfizmusok $\text{End}_0(W^+)$ terével egyezik meg, így (dimenzió okokból) η^+ egy $\Lambda_{\mathbb{C}}^+ \rightarrow \text{End}_0(W^+)$ izomorfizmust ad; ezen izomorfizmus inverzét jelölje $\tau: \text{End}_0(W^+) \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}^+$. Egy $\psi \in \Gamma(W^+)$ pozitív spinor a $(\psi \otimes \psi^*)(\alpha) = \langle \psi, \alpha \rangle \psi$ formulával egy $\psi \otimes \psi^* \in \text{End}(W^+)$ endomorfizmust definiál, melyre $(\psi \otimes \psi^*)_0 = \psi \otimes \psi^* - \frac{1}{2} \text{Tr}(\psi \otimes \psi^*) \text{id}_{W^+}$ már $\text{End}_0(W^+)$ -beli lesz. (Ily módon tehát $(\psi \otimes \psi^*)_0(\alpha) = \langle \psi, \alpha \rangle \psi - \frac{1}{2} |\psi|^2 \alpha$.) Jelölje $\sigma(\psi) \in i\Lambda^+ \subset \Lambda_{\mathbb{C}}^+$ a $(\psi \otimes \psi^*)_0$ nulla nyomú endomorfizmus τ -nál vett képét.

Legyen tehát X irányított 4-dimenziós Riemann-sokaság és $P_{\text{Spin}^c(4)} \rightarrow X$ egy rögzített spin^c struktúra. Jelölje $L \rightarrow X$ a spin^c struktúra determináns nyalábját, $A \in \mathcal{A}_L$ a determináns nyaláb egy konnexitását, $\psi \in \Gamma(W^+)$ pedig egy pozitív spinort. A

$$\not\partial_A \psi = 0, \quad F_A^+ = \sigma(\psi)$$

egyenleteket *Seiberg-Witten egyenleteknek* nevezzük; ezekben az egyenletekben az $(A, \psi) \in \mathcal{A}_L \times \Gamma(W^+)$ pár az ismeretlen. Másként, a Seiberg-Witten egyenletek megoldásait az $\mathcal{F}(A, \psi) = (\not\partial_A \psi, F_A^+ - \sigma(\psi)) \in \Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X)$ függvény nullhelyei adják.

10.1.3. megjegyzés. A fenti egyenleteket Seiberg és Witten — fizikai megfontolások alapján — a sokkal kézenfekvőbb ($SU(2)$ -konnexiókra felírt) $F_A^+ = 0$ egyenletből származtatta. Erről a fizikai háttérről lásd [Wi].

10.1.4. lemma. A $\mathcal{G} = \text{Map}(X, S^1)$ csoport természetes hatása az $\mathcal{A}_L \times \Gamma(W^+)$ és a $\Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X)$ tereken \mathcal{F} -et \mathcal{G} -ekvvariánssá teszi. Következésképp ha $\mathcal{F}(A, \psi) = 0$, akkor $\mathcal{F}(g^*(A, \psi)) = 0$ minden $g \in \mathcal{G}$ -re. \square

A \mathcal{G} csoportot szokás mérce-csoportnak (gauge csoport) nevezni. Az $\mathcal{A}_L \times \Gamma(W^+)$ tér \mathcal{G} -vel vett faktorát \mathcal{B}_L -lél jelöljük.

10.1.5. megjegyzés. A \mathcal{G} csoport általában szabadon hat $\mathcal{A}_L \times \Gamma(W^+)$ -en. Könnyen belátható, hogy $\text{Stab}_{(A, \psi)} \neq 1$ pontosan akkor ha $\psi \equiv 0$; ekkor $\text{Stab}_{(A, \psi)} = \{f \in \mathcal{G} \mid f \text{ } X\text{-ből } S^1\text{-be mutató konstans leképezés}\} \cong S^1$. Illy módon \mathcal{B}_L a $\psi \equiv 0$ pontok képeit leszámítva egy "sokaság". (A \mathcal{B}_L tér a $\psi \equiv 0$ pontok képeit leszámítva egy (végtelen dimenziós) Banach-sokasággá tehető, lásd még a 10.3 fejezetet.) Az $(A, 0) \in \mathcal{B}_L$ alakú párokat *reducibilis* pároknak nevezik.

10.1.6. definíció. Legyen \mathcal{B}_L^* a reducibilis párok komplementuma, vagyis $\mathcal{B}_L^* = \{(A, \psi) \in \mathcal{A}_L \times \Gamma(W^+) \mid \psi \text{ nem azonosan nulla}\} / \mathcal{G}$. A \mathcal{B}_L^* teret *konfigurációs térnek* hívjuk. Mivel \mathcal{G} a \mathcal{B}_L^* téren szabadon hat, az $\mathcal{A}_L \times (\Gamma(W^+) - \{0\}) \rightarrow \mathcal{B}_L^*$ faktorizáló leképezés egy principális \mathcal{G} -nyalábot ad meg. \mathcal{G} fenti, $\Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X)$ -en való reprezentációja így egy $\mathcal{E} = (\Gamma(W^+) - \{0\} \times \mathcal{A}_L) \times_{\mathcal{G}} (\Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X)) \rightarrow \mathcal{B}_L^*$ vektornyalábot, az $\mathcal{F}: \mathcal{A}_L \times (\Gamma(W^+) - \{0\}) \rightarrow \Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X)$ \mathcal{G} -ekvvariáns függvény pedig egy $\overline{\mathcal{F}} \in \Gamma(\mathcal{E})$ szelést definiál. Az $\overline{\mathcal{F}}^{-1}(0) \subset \mathcal{B}_L^*$ nullhelyek halmazát a P spin^c struktúrához (és g metrikához) tartozó $\mathcal{M}_g(P)$ modulustérnek hívjuk.

10.1.7. tétel. Azon metrikák tere, melyekre $F_A^+ = 0$ megoldható (vagyis a Seiberg-Witten egyenleteknek van reducibilis megoldása) az összes metrikák terében egy $b_2^+(X)$ -kodimenziós alteret alkot. \square

10.1.8. megjegyzés. A fentiekhez hasonlóan definiálható a Seiberg-Witten modulustér \mathcal{B}_L részeként mint $\mathcal{F}^{-1}(0)/\mathcal{G}$; $b_2^+(X) > 0$ esetén azonban (generikus metrikát választva) a két definíció a 10.1.7 tétel értelmében megegyezik. A továbbiakban így a 10.1.6 definícióban adott meghatározást fogjuk alkalmazni. $b_2^+(X) > 1$ teljesülése esetén valójában metrikák (alkalmas) 1-paraméteres seregét választva az ezekkel paraméterezett modulustér-sereg is \mathcal{B}_L^* része marad. Mivel a későbbiekben ez a tulajdonság fontos lesz, a továbbiakban mindig feltesszük majd, hogy $b_2^+(X) > 1$.

A 10.3 fejezetben megmutatjuk, hogy az \mathcal{M} modulustér egy irányított, kompakt (tehát véges dimenziós) sokaság, melynek dimenzióját a $d = \frac{1}{4}(c_1^2(W^+) - (3\sigma(X) + 2\chi(X)))$ formula adja meg. Ezen tulajdonságokat feltéve a $SW_X: \text{Spin}^c(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ függvény már könnyen definiálható. (Ebben az összefüggésben $\text{Spin}^c(X)$ jelöli X spin^c struktúráinak terét; a 9.2.8(b) feladat értelmében ez a halmaz (nem kanonikus módon) a $H^2(X; \mathbb{Z})$ csoporttal azonosítható.)

10.1.9. tétel. A \mathcal{B}_L^* konfigurációs tér $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ -nel homotóp ekvivalens. Következésképp kohomológia-gyűrűjére $H^*(\mathcal{B}_L^*; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\mu]$ áll fenn, ahol $\mu \in H^2(\mathcal{B}_L^*; \mathbb{Z})$ 2-dimenziós generátor. \square

Legyen tehát $P = P_{\text{Spin}^c(4)}$ egy rögzített spin^c struktúra X -en, és vegyük a hozzátartozó $\mathcal{M}_g(P) \subset \mathcal{B}_L^*$ modulusteret. Mivel $\mathcal{M}_g(P)$ egy kompakt, irányított és zárt sokaság, így fundamentális osztálya egy $[\mathcal{M}_g(P)] \in H_d(\mathcal{B}_L^*; \mathbb{Z})$ homológia osztályt definiál. Amennyiben d páros, legyen $SW_X(P) = \langle \mu^{\frac{d}{2}}, [\mathcal{M}_g(P)] \rangle \in \mathbb{Z}$. Páratlan d esetén $[\mathcal{M}_g(P)]$ automatikusan 0, így ekkor nem tudunk értelmes invariánst definiálni.

10.1.10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy $d \equiv 1 + b_2^+ - b_1 \pmod{2}$, tehát az egyszerűen összefüggő esetben d pontosan akkor páros, ha b_2^+ páratlan.

10.1.11. tétel. A fent definiált $SW_X(P) \in \mathbb{Z}$ szám $b_2^+(X) > 1$ esetén nem függ az X -en rögzített metrikától, így az $SW_X: \text{Spin}^c(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ függvény egy diffeomorfizmus invariáns. \square

10.1.12. megjegyzés. Emlékezzünk vissza arra, hogy $\pi_1(X) = 1$ esetén a determináns vonalnyaláb meghatározza a spin^c struktúrát, így ebben az esetben $SW_X: H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ definiálható: ha $K \in H^2(X; \mathbb{Z})$ -re $K \equiv w_2(X) \pmod{2}$, akkor a P_K , K által meghatározott spin^c struktúrával legyen $SW_X(K) = SW_X(P_K)$; legyen $SW_X(K) = 0$ egyébként. A fenti tétel ebben az esetben úgy értendő, hogy egy $f: X_1 \rightarrow X_2$ irányítástartó diffeomorfizmusra $SW_{X_2}(K) = \pm SW_{X_1}(f^*K)$. (A \pm előjelre később még visszatérünk.)

10.2 Tételek Seiberg-Witten invariánsokra

A következőkben a fent definiált SW_X függvény néhány nevezetes tulajdonságát soroljuk fel — bizonyítás nélkül. (Egy (X, ω) párt szimplektikus sokaságnak nevezünk, ha ω egy zárt, nem-elfajuló 2-forma az X sokaságon.)

10.2.1. tétel. (Taubes, [T1]) *Ha (X, ω) egy zárt, szimplektikus 4-sokaság, akkor $SW_X(\pm c_1(X, \omega)) = \pm 1$. Speciálisan, ha X egy Kähler sokaság, akkor $SW_X(\pm c_1(X)) = \pm 1$. \square*

10.2.2. tétel. *Legyen X olyan 4-sokaság, melyre $b_2^+(X) > 1$ teljesül.*

- (a) *Ha $X = X_1 \# X_2$ és $b_2^+(X_i) > 0$ ($i = 1, 2$), akkor $SW_X \equiv 0$.*
- (b) *Ha X -en létezik pozitív skalárgörbületű metrika, akkor $SW_X \equiv 0$.*
- (c) *Ha X felbontható $X = X_1 \cup_N X_2$ alakban úgy, hogy $b_2^+(X_i) > 0$ ($i = 1, 2$), és az N 3-sokaságon létezik pozitív skalárgörbületű metrika, akkor $SW_X \equiv 0$. \square*

A következő tétel kapcsolatot mutat egy sokaság és felfújtjának Seiberg-Witten invariánsai között.

10.2.3. tétel. *Tegyük fel, hogy X egyszeresen összefüggő és $b_2^+(X) > 1$; legyen továbbá $K \in H^2(X; \mathbb{Z})$. Ekkor $SW_X(K) = \pm SW_{X \# \overline{\mathbb{C}P^2}}(K \pm E)$. (A formulában E jelöli a felfújás kivételes divizora által definiált homológiaelem — mely $H_2(\overline{\mathbb{C}P^2}; \mathbb{Z}) < H_2(X \# \overline{\mathbb{C}P^2}; \mathbb{Z})$ generátora — Poincaré duálisát.) \square*

Egy $K \in H^2(X; \mathbb{Z})$ kohomológia-osztály az X sima 4-sokaság Seiberg-Witten bázisosztálya, ha $SW_X(K) \neq 0$. Az X sokaság bázisosztályainak halmazát Bas_X jelöli; vagyis $Bas_X = \{K \in H^2(X; \mathbb{Z}) \mid SW_X(K) \neq 0\}$. Belátható, hogy egy X sokaságnak csak véges sok bázisosztálya van, és K pontosan akkor bázisosztály, amikor $-K$. Végül egy fontos kapcsolatot mutatunk egy 4-sokaság Seiberg-Witten invariánsai és beágyazott felületei között.

10.2.4. tétel. ([OSz]) *Tegyük fel, hogy $K \in Bas_X$ -re $K^2 = 3\sigma(X) + 2\chi(X)$. Legyen $\Sigma \subset X$ beágyazott felület ($b_2^+(X) > 1$), és tegyük fel, hogy $[\Sigma] \neq 0$, valamint ha $[\Sigma]^2 < 0$, akkor $g(\Sigma) > 0$ áll fenn. Ekkor $2g(\Sigma) - 2 \geq [\Sigma]^2 + |K([\Sigma])|$ minden K bázisosztályra teljesül. \square*

10.2.5. megjegyzés. Egy olyan X sokaságot, melyre $K \in Bas_X$ esetén $K^2 = 3\sigma(X) + 2\chi(X)$ teljesül, egyszerű típusúnak hívjuk. Minden jelenleg ismert egyszeresen összefüggő, $b_2^+(X) > 1$ -et teljesítő 4-sokaság egyszerű típusú. Fontos kérdés, hogy léteznek-e nem egyszeresen összefüggő 4-sokaságok. Ismert például, hogy minden szimplektikus (így speciálisan minden Kähler) 4-sokaság egyszerű típusú.

10.2.6. feladatok. (a) *Lássuk be, hogy ha $S \subset X$ beágyazott gömb önátmetszése pozitív és $b_2^+(X) > 1$, akkor $SW_X \equiv 0$. Speciálisan egy szimplektikus sokaság (melyre $b_2^+(X) > 1$ is teljesül) nem tartalmazhat beágyazott pozitív négyzetű gömböt.*

(b) *Lássuk be, hogy ha $C \subset S$ összefüggő sima komplex görbe egy S komplex felületben, és Σ simán beágyazott Riemann-felületre $[C] = [\Sigma] \in H_2(S; \mathbb{Z})$ teljesül, akkor $g(C) \leq g(\Sigma)$. Másszóval komplex görbék minimalizálják a génuszt homológiaosztályukban. (Ezt az állítást szokás Thom sejtésnek hívni.)*

A fenti tételek következményeként belátható, hogy $SW_{3\mathbb{C}P^2 \# 20\overline{\mathbb{C}P^2}} \equiv 0$. Legyen továbbá X az 5 előadásban megismert $K3$ -felület. Az 5.3.6 állításban $H_2(X; \mathbb{Z})$ egy olyan bázisát találtuk meg, melyre a fenti 10.2.4 tételt alkalmazva könnyen látható, hogy $0 \in H^2(X; \mathbb{Z})$ az X 4-sokaság egyetlen szóbajövő bázisosztálya. A 10.2.1 tétel szerint (mivel X egy komplex felület, melyre $c_1(X) = 0$) azt kapjuk, hogy $Bas_X = \{0\}$; a 10.2.3 tétel szerint így $Bas_{X \# \overline{\mathbb{C}P^2}} = \{\pm E\}$. Mivel az SW Seiberg-Witten függvény egy diffeomorfizmus-invariáns, valamint $Q_{X \# \overline{\mathbb{C}P^2}} \cong Q_{3\mathbb{C}P^2 \# 20\overline{\mathbb{C}P^2}} \cong 3\langle 1 \rangle \oplus 20\langle -1 \rangle$, a következő adódik (lásd még a 8.3.5 tételt):

10.2.7. következmény. *Az $X \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ felfújt $K3$ -felület és a $3\mathbb{C}P^2 \# 20\overline{\mathbb{C}P^2}$ összefüggő összeg homeomorf, nem-diffeomorf (egyszeresen összefüggő) 4-sokaságokra adnak példát. \square*

10.3 A modulustérről

Emlékezzünk vissza arra, hogy az $\mathcal{M}_g(P)$ modulusteret az $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}_L^*$ nyaláb egy $\overline{\mathcal{F}} \in \Gamma(\mathcal{E})$ szelésének null-helyeként definiáltuk. A következőkben a modulustér simaságát és kompaktságát adó tétel bizonyításának vázlatát szeretnénk megadni. Amennyiben \mathcal{B}_L^* és \mathcal{E} véges dimenziós lenne, pusztán azt kellene elérnünk, hogy $\overline{\mathcal{F}}$ transzverzális legyen a nyaláb nulla-szelésére; hiszen ekkor (feltéve még hogy \mathcal{B}_L^* kompakt és sima, valamint hogy \mathcal{E} egy n -dimenziós nyaláb) standard érvelés mutatná azt, hogy $\overline{\mathcal{F}}^{-1}(0)$ egy $(\dim \mathcal{B}_L^* - n)$ -dimenziós kompakt sokaság. (Az irányítás kérdését egyelőre ne feszegezzük.) Esetünkben azonban \mathcal{B}_L^* nem kompakt és nem véges dimenziós, valamint \mathcal{E} is végtelen dimenziós nyaláb. Ezáltal a szokásos érvelés kicsit megnehezedik.

Legyen $\mathcal{P}ert(X) = \{(g, \eta) \mid g \text{ metrika } X\text{-en, } \eta \text{ } g\text{-önduális } 2\text{-forma}\}$ a *perturbációk tere*. Az $\mathcal{E} \times \mathcal{P}ert(X) \rightarrow \mathcal{B}_L^* \times \mathcal{P}ert(X)$ nyalábnak egy $\tilde{\mathcal{F}}$ szelését definiálhatjuk a következő $\Gamma(W^+) \times \mathcal{A}_L \times \mathcal{P}ert(X) \rightarrow \Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X) \times \mathcal{P}ert(X)$ függvényel:

$$(\psi, A, g, \eta) \mapsto (\not\partial_A \psi, F_A^+ - \sigma(\psi) - i\eta, g, \eta).$$

Célunk megmutatni azt, hogy az így kapott $\tilde{\mathcal{F}}$ szelés már transzverzális a megfelelő nullszelésre. Véges dimenzióban pusztán a szelés linearizáltjáról kell megmutatni, hogy ráképezés a tipikus fibrumra (gondoljunk a szelésre, mint egy fenti ekvivariáns függvényre); ebből az implicit függvénytétel már adná az eredményt. Az implicit függvénytételhez hasonló tétel igaz Banach terek közötti leképezésekre is — a fenti terek azonban (mivel nyalábok C^∞ -szelései) nem alkotnak Banach tereket. Az analízis egy standard eszközével (az ún. *Szoboljev teljesség tétellel*) azonban a fenti terek Banach terekké tehetők, így a következő látható be:

10.3.1. tétel. *Tereinket (és a \mathcal{G} csoportot) alkalmasan teljessé téve, és az $\tilde{\mathcal{F}}$ szelést ezekre a terekre kiterjesztve egy, a nulla szelésre transzverzális szelést kapunk. Következésképp $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0)$ egy sima (végtelen dimenziós) Banach sokaság.* \square

$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0)$ -t szokták a paraméterezett modulustérnek nevezni, hiszen ez a tér az összes modulustér uniója minden lehetséges g és η értékre.

10.3.2. megjegyzés. Előfordulhatna, hogy a teljessé tett térben az $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0)$ megoldások "többben vannak" mint az eredeti C^∞ -szelésekre értelmezett megoldások. Vagyis elvben előfordulhat, hogy egy, csak a teljessé tétellel a térbe kerülő elem is megoldja az egyenleteket. Bebizonyítható azonban, hogy bárhogy is tesszük teljessé a tereket, a kapott $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0)$ -beli elemek mind C^∞ -megoldások lesznek, így ez a jelenség nem fordul elő.

Legyen tehát $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0) \xrightarrow{\pi} \mathcal{P}ert(X)$ a perturbációs térre való vetítés. A Sard lemma végtelen dimenziós általánosítása (melyet Sard-Smale tételnek szokás nevezni) a következőt adja:

10.3.3. tétel. *A $\mathcal{P}ert(X)$ tér majdnem minden pontja reguláris értéke π -nek, vagyis egy generikus (g, η) választás esetén a $\pi^{-1}(g, \eta) = \mathcal{M}_g^\eta \subset \tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0)$ modulustér egy sima sokaság.* \square

A kompaktság, irányíthatóság és a dimenzió kiszámításáról pusztán a következő rövid megjegyzésekre szorítkozunk. A kompaktság a Weitzenböck formula egy következménye; ebből ugyanis belátható, hogy egy megoldás normája a sokaságtól függő korlát alatt marad, így az Arzela-Ascoli tétel alkalmazásával a kompaktság bizonyítása egyszerű.

10.3.4. feladat. A 9.2.9(c) megjegyzésben megismert Weitzenböck formula segítségével lássuk be, hogy $(A, \psi) \in \mathcal{M}_g(P)$ esetén $|\psi(x)|^2 \leq \max(0, -s_X)$, ahol s_X a g metrika $s(x)$ skalárgörbülete (-1) -szeresének maximuma. (*Ötlet:* Tegyük fel, hogy $x_0 \in X$ -ben $|\psi(x)|$ -nek maximuma van. $\not\partial_A \psi = 0$ miatt $\langle \nabla_A^* \nabla_A \psi, \psi \rangle + \frac{1}{4} s \langle \psi, \psi \rangle + \langle \eta^+(F_A) \psi, \psi \rangle = 0$, így a második Seiberg-Witten egyenlet valamint x_0 választása miatt $s(x_0) |\psi(x_0)|^2 + |\psi(x_0)|^4 \leq 0$, amiből a megoldás már következik.)

A modulustér dimenzióját az Atiyah-Singer indextétel alkalmazásával lehet kiszámítani. Az irányíthatóság bebizonyítása meglehetősen bonyolult, és az derül ki, hogy $H^0(X; \mathbb{R}) \oplus H^+(X; \mathbb{R})$ egy irányítását (amit X homológia-irányításának nevezünk) rögzítve kapunk csak az $\mathcal{M}_g(P)$ modulustéren irányítást. Ez a magyarázata a \pm előjelnek 10.1.12 megjegyzésben: bár f tartja X_1 és X_2 irányítását, esetleg megfordíthatja a rögzített homológia-irányításokat. Lássuk még be, hogy az $[\mathcal{M}_g^\eta] \in H_d(\mathcal{B}_L^*; \mathbb{Z})$ fundamentális osztály nem függ a választott g metrikától és η perturbáló 2-formától.

10.3.5. tétel. Ha $b_2^+(X) > 1$, akkor a (g_0, η_0) és (g_1, η_1) párok $H_d(\mathcal{B}_L^*; \mathbb{Z})$ -ben homológ osztályokat definiálnak.

Bizonyítás. Mivel $b_2^+(X) > 1$, létezik egy olyan $\gamma_t: [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}ert(X)$, (g_0, η_0) -t (g_1, η_1) -gyel összekötő út, mely nem tartalmaz reducibilis megoldásokat. Az út inverz képe tehát \mathcal{B}_L^* -beli modulusterekből alkotott $\mathcal{M}_g^{\eta_0}$ és $\mathcal{M}_g^{\eta_1}$ közötti kobordizmus lesz, ami bizonyítja a tételt. \square

Tárgymutató

algebrai metszet, 7
atlasz, 4

Casson

fogantyú, 36
torony, 36

Clifford szorzás, 43, 46
csokor, 17

diagram

Heegaard, 10
Kirby, 11

Dirac operátor, 44
csavart, 46

diszk, 4

egyszerű típusú sokaság, 49

elhagyható pár, 9, 26

elliptikus

felület, 22
fibrálás, 22
görbe, 22

fogantyú, 4

komagja, 4
magja, 4
övgömbje, 4
ragasztási gömbje, 4

fogantyú-csúsztatás, 8, 26

fogantyú-felbontás

abszolút, 6
duális, 6
homológiái, 7
relatív, 6

golyó, 4

gömb, 4

határösszeg, 20

Heegaard

diagram, 10
felbontás, 10

h-kobordizmus, 31

tétel, 31

hurkolódási szám, 18

irányítás, 4

izotópia, 32

karakterisztikus elem, 14

Kirby diagram, 11

kobordizmus, 31

csoport, 31

konfigurációs tér, 48

kovariáns deriválás, 43

lánc, 18

hurkolódási szám, 18

leképezés-osztály csoport, 10

Levi-Civita konnexió, 43

mérce csoport, 48

metszet

algebrai, 7, 32
geometriai, 32

metszetforma, 12

diagonális, 16

paritása, 13

rangja, 13

szignatúrája, 13

unimoduláris, 12

modulustér, 48

összefüggő összeg, 20, 27

párhuzamos eltolás, 43

perturbációk tere, 50

Poincaré

dualitási tér, 17

sejtés, 16

potozott kör, 24

primitív elem, 13

ragasztó leképezés, 6

Seiberg-Witten

bázisosztály, 49

egyenletek, 47

- invariáns, 48
- Seifert-felület, 18, 24
- spin
 - csoport, 42
 - struktúra, 42
- spin^c struktúra, 45
 - determináns nyalábja, 45
- spinor
 - nyaláb, 45
 - reprezentáció, 42
- szignatúra-tétel, 21
- szimplektikus sokaság, 49

- tautologikus vonalnyaláb, 21
- teljes transzformált, 22
- térkép, 4
- transzformált
 - teljes, 22
 - valódi, 22
- triviális csomó, 24
- tüskézés, 6
- tüskéző kör, 24

- unimoduláris, 12

- valódi transzformált, 22

- Weitzenböck formula, 44
- Whitney
 - diszk, 33, 36
 - kör, 33, 35
 - trükk, 33, 36

Irodalomjegyzék

- [A] S. Akbulut, *On 2-dimensional homology classes of 4-manifolds*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **82** (1977), 99–106.
- [C] A. Casson, *Three lectures on new infinite constructions in 4-dimensional manifolds*, notes prepared by L. Guillou, A la Recherche de la Topologie Perdue, Progress in Mathematics, vol.62, Birkhäuser, 1986, 201–244.
- [Ce] J. Cerf, *La stratification naturelle des espaces fonctions différentiables réelles et la théorème de la pseudoisotopie*, Publ. Math. I.H.E.S. **39** (1970).
- [CFHS] C. Curtis, M. Freedman, W.-C. Hsiang és R. Stong, *A decomposition theorem for h-cobordant smooth simply connected compact 4-manifolds*, Invent. Math. **123** (1996), 343–348.
- [BG] Ž. Bižaca és R. Gompf, *Elliptic surfaces and some simple exotic \mathbb{R}^4 's*, J. Diff. Geom. **43** (1996), 458–504.
- [D1] S. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 279–315.
- [D2] S. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), 257–315.
- [DK] S. Donaldson és P. Kronheimer, *Geometry of four-manifolds*, Oxford Univ. Press, 1990.
- [F] M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 357–453.
- [FQ] M. Freedman és F. Quinn, *Topology of 4-manifolds*, Princeton Mathematical Series **39**, Princeton University Press, 1990.
- [Fu] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ -conjecture*, preprint.
- [GS] R. Gompf és A. Stipsicz *An introduction to 4-manifolds and Kirby calculus*, könyv megjelenés előtt.
- [HKK] J. Harer, A. Kas és R. Kirby, *Handlebody decompositions of complex surfaces*, Memoirs AMS **62** no. 350, 1986.
- [K1] R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3* , Invent. Math. **45** (1978), 35–56.
- [K2] R. Kirby, *The Topology of 4-Manifolds*, Springer Lecture Notes 1374, Springer-Verlag, 1989.
- [KKM] D. Kotschick, P. Kronheimer és T. Mrowka, könyv előkészületben.
- [LP] F. Laudenbach és V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Math. Soc. France **100** (1972), 337–344.
- [LM] B. Lawson és M. Michelson, *Spin geometry*, Princeton Math. Series vol. **39**, 1989.
- [La] T. Lawson, *h-cobordisms between simply connected 4-manifolds*, Topology and its Applications **28** (1988), 75–82.
- [Lu] N. Lu, *A simple proof of the fundamental theorem of Kirby calculus on links*, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), 143–156.
- [M1] J. Milnor, *Morse Theory*, Ann. Math. Studies **51**, Princeton University Press, 1963.
- [M2] J. Milnor, *Spin structures on manifolds*, L'Enseignement Math. **9** (1963), 198–203.

- [M3] J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, 1965.
- [MH] J. Milnor és D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Springer-Verlag, 1973.
- [MS] J. Milnor és J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Ann. Math. Studies **76**, Princeton University Press, 1974.
- [OSz] P. Ozsváth és Z. Szabó, *The symplectic Thom conjecture*, preprint.
- [R] V. Rohlin, *New results in the theory of four dimensional manifolds*, Dok. Akad. Nauk. USSR **84** (1952), 221–224.
- [RS] C. Rourke és B. Sanderson, *Introduction to Piecewise-Linear Topology*, Ergebnisse der Mathematik, Band 69, Springer-Verlag 1972.
- [S] D. Salamon, *Spin geometry and Seiberg-Witten invariants*, book in preparation
- [SSz] Stipsicz A. és Szabó Z., *4-dimenziós sima sokaságok elmélete (Donaldson után)*, jegyzet.
- [T1] C. Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Letters **1** (1994), 809–822.
- [Tr] B. Trace, *On attaching 3-handles to a 1-connected 4-manifold*, Pacific Jour. Math. **99** (1982), 175–181.
- [W1] C.T.C. Wall, *Diffeomorphisms of 4-manifolds*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 131–140.
- [W2] C.T.C. Wall, *On simply-connected 4-manifolds*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 141–149.
- [W3] C.T.C. Wall, *Quadratic forms on finite groups*, Topology **2** (1964), 281–298.
- [Wi] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 769–796.