Kontakt struktúrák: létezés és egyértelműség

Stipsicz András

Magyar Tudományos Akadémia
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

2015. november 2.

Sokaságok

Egy X topologikus tér egy sima sokaság, ha lokálisan olyan mint valamilyen $\mathbb{R}^n$ (tehát minden pont körül van egy *lokális térkép*), és a térképek közötti átmenet végtelenszer folytonosan differenciálható.

Formálisan: létezik egy olyan $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ halmazrendszer (egy *atlasz*), melyre

- $U_\alpha \subset X$ nyílt és $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$,
- $\phi_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus, és
- $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ végtelenszer folytonosan differenciálható (ahol értelmezett)

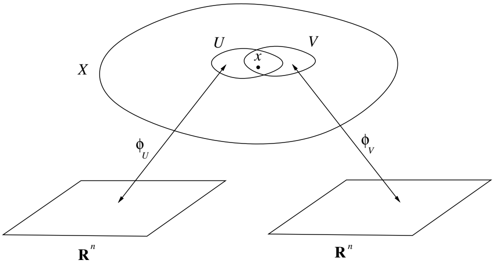
Sokaságok

Egy X topologikus tér egy sima sokaság, ha lokálisan olyan mint valamilyen $\mathbb{R}^n$ (tehát minden pont körül van egy *lokális térkép*), és a térképek közötti átmenet végtelenszer folytonosan differenciálható.

Formálisan: létezik egy olyan $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ halmazrendszer (egy *atlasz*), melyre

- $U_\alpha \subset X$ nyílt és $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$,
- $\phi_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus, és
- $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ végtelenszer folytonosan differenciálható (ahol értelmezett)

Átmenő függvények leírása



Érintővektorok

Egy ilyen X téren értelmes $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóságáról beszélni (térképen nézzük; a lánc-szabály miatt ez a tulajdonság térképtől független).

Tudunk iránymenti deriváltat is venni: ha egy U_α térképen a ϕ_α által adott koordináták $\{x_1, \ldots, x_n\}$, akkor a szokásos $\sum_n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ formulát alkalmazzuk (ez az $(a_1, \ldots, a_n)$-irányú derivált).

Ha egy pont két térképben is benne van, akkor ismét a lánc-szabály segít: az $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ((U_β, ϕ_β) által adott) koordinátákban a megfelelő iránymenti derivált a

$$\sum_n a_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}$$

formulával adható meg.

Érintővektorok

Egy ilyen X téren értelmes $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóságáról beszélni (térképen nézzük; a lánc-szabály miatt ez a tulajdonság térképtől független).

Tudunk iránymenti deriváltat is venni: ha egy U_α térképen a ϕ_α által adott koordináták $\{x_1, \ldots, x_n\}$, akkor a szokásos $\sum_n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ formulát alkalmazzuk (ez az $(a_1, \ldots, a_n)$-irányú derivált).
Ha egy pont két térképben is benne van, akkor ismét a lánc-szabály segít: az $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ((U_β, ϕ_β) által adott) koordinátákban a megfelelő iránymenti derivált a

$$\sum_n a_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}$$

formulával adható meg.

Érintőnyaláb

Az *érintővektorokat* ezekkel az iránymenti deriválásokkal definiálhatjuk.

Az érintővektorok egy újabb sokaságot, az X sokaság TX *érintőterét* alkotják; ez $2n$-dimenziós lesz. A

$$\pi\colon TX \to X$$

vetítés pedig az *érintőnyalábot* adja meg. Ennek fibrumai az érintőterek (a fibrumok tehát vektorterek).

Érintőnyaláb

Az *érintővektorokat* ezekkel az iránymenti deriválásokkal definiálhatjuk.

Az érintővektorok egy újabb sokaságot, az X sokaság TX *érintőterét* alkotják; ez $2n$-dimenziós lesz. A

$$\pi \colon TX \to X$$

vetítés pedig az *érintőnyalábot* adja meg. Ennek fibrumai az érintőterek (a fibrumok tehát vektorterek).

Differenciálformák

Egy $\lambda\colon TX \to \mathbb{R}$ olyan függvényt, mely $\pi\colon TX \to X$ fibrumain (vagyis az érintőtereken) lineáris, 1-formának nevezünk.

Hasonlóan, egy olyan hozzárendelést, mely a TX egy fibrumában lévő k vektorhoz rendel úgy egy valós számot, hogy minden fibrumon egy k-lineáris, antiszimmetrikus formát kapjunk, az X sokaság differenciál-formájának (k-formájának) nevezünk.

Differenciálformák

Egy $\lambda\colon TX \to \mathbb{R}$ olyan függvényt, mely $\pi\colon TX \to X$ fibrumain (vagyis az érintőtereken) lineáris, 1-formának nevezünk.

Hasonlóan, egy olyan hozzárendelést, mely a TX egy fibrumában lévő k vektorhoz rendel úgy egy valós számot, hogy minden fibrumon egy k-lineáris, antiszimmetrikus formát kapjunk, az X sokaság differenciál-formájának (k-formájának) nevezünk.

Ékszorzat

Ha α és β egy k- és egy m-forma, akkor $\alpha \wedge \beta$ *ékszorzat* egy olyan $(k+m)$-forma, mely egy vektor-$(k+m)$-esen úgy értékelődik ki, hogy a vektorok egy permutációját behelyettesítjük α-ba és β-ba, ezeket az értékeket összeszorozzuk, a kapott számokat pedig összeadjuk a permutáció paritásától függő előjellel.

Például $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 1-formákra a $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$ k-forma értéke a $v_1, \ldots, v_k$ érintővektorokon a $(\lambda_i(v_j))$ mátrix determinánsa.

Az x_i koordináta-függvényre dx_i értéke $\frac{\partial}{\partial x_j}$ vektoron δ_{ij}.

Ékszorzat

Ha α és β egy k- és egy m-forma, akkor $\alpha \wedge \beta$ *ékszorzat* egy olyan $(k+m)$-forma, mely egy vektor-$(k+m)$-esen úgy értékelődik ki, hogy a vektorok egy permutációját behelyettesítjük α-ba és β-ba, ezeket az értékeket összeszorozzuk, a kapott számokat pedig összeadjuk a permutáció paritásától függő előjellel.

Például $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 1-formákra a $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$ k-forma értéke a $v_1, \ldots, v_k$ érintővektorokon a $(\lambda_i(v_j))$ mátrix determinánsa.

Az x_i koordináta-függvényre dx_i értéke $\frac{\partial}{\partial x_j}$ vektoron δ_{ij}.

Ékszorzat

Ha α és β egy k- és egy m-forma, akkor $\alpha \wedge \beta$ *ékszorzat* egy olyan $(k+m)$-forma, mely egy vektor-$(k+m)$-esen úgy értékelődik ki, hogy a vektorok egy permutációját behelyettesítjük α-ba és β-ba, ezeket az értékeket összeszorozzuk, a kapott számokat pedig összeadjuk a permutáció paritásától függő előjellel.

Például $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 1-formákra a $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$ k-forma értéke a $v_1, \ldots, v_k$ érintővektorokon a $(\lambda_i(v_j))$ mátrix determinánsa.

Az x_i koordináta-függvényre dx_i értéke $\frac{\partial}{\partial x_j}$ vektoron δ_{ij}.

Külső derivált

Egy α k-formára a $d\alpha$ $(k+1)$-forma a következő módon definiált: legyen egy térképen

$$\alpha = \sum f_I(x_1, \ldots, x_n) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

ekkor

$$d\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Stokes tétele ekkor: egy ω k-formára és egy $C \subset X$ peremes $(k+1)$-dimenziós részsokaságra $\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$.
(Ez az $\int_{[a,b]} F' dx = \int_{\partial[a,b]} F = F(b) - F(a)$ Newton-Leibniz formula általánosítása.)

Külső derivált

Egy α k-formára a $d\alpha$ $(k+1)$-forma a következő módon definiált: legyen egy térképen

$$\alpha = \sum f_I(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

ekkor

$$d\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Stokes tétele ekkor: egy ω k-formára és egy $C \subset X$ peremes $(k+1)$-dimenziós részsokaságra $\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$.
(Ez az $\int_{[a,b]} F' dx = \int_{\partial [a,b]} F = F(b) - F(a)$ Newton-Leibniz formula általánosítása.)

Szimplektikus struktúrák

Definíció

Legyen X egy $2n$-dimenziós sima sokaság. Az ω 2-forma egy **szimplektikus forma** *ha*

- *ω nem-elfajuló (fibrum-menti tulajdonság: minden $v \neq 0$-ra legyen w hogy $\omega(v, w) \neq 0$), és*
- *ω zárt, vagyis $d\omega = 0$.*

A nem-elfajulóság avval ekvivalens, hogy $\omega \wedge \ldots \wedge \omega \neq 0$ (és akkor minden bázisra egy előjelet ad, ami a sokaságon egy *irányítást jelent*).

2-dimenzióban (tehát $n = 1$ esetén) ω egyszerűen egy területi forma.

Példa

- $\mathbb{R}^{2n}$-en az $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ koordinátákban
$$\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$$
2-forma szimplektikus lesz. (Ez az ún. *standard szimplektikus forma*.)
- TX-en (pontosabban a T^*X duális téren) egy természetes szimplektikus struktúra adódik (a Liouville formából). Ezt alkalmazzuk klasszikus mechanikai rendszerek leírásában (Hamilton formalizmus).

Kontakt struktúrák

Legyen most X egy $(2n+1)$-dimenziós irányított sokaság.

Definíció

A λ 1-forma X-en egy kontakt forma ha

$$\lambda \wedge d\lambda \wedge \ldots \wedge d\lambda = \lambda \wedge d\lambda^{\wedge n} > 0.$$

A $\xi = \ker \lambda \leq TX$ altér-mező az X-en egy **kontakt struktúra.**

A ξ altérmezőn a $d\lambda$ 2-forma egy szimplektikus forma lesz.

Standard kontakt struktúra

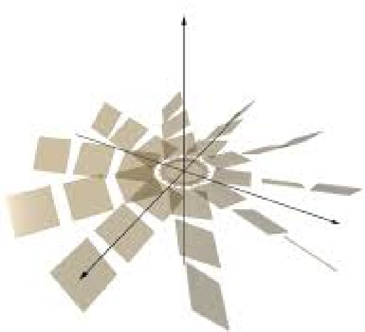
Az $\mathbb{R}^{2n+1}$ téren (a $(z, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ koordinátákban) a

$$\lambda = dz + \sum x_i dy_i$$

1-forma egy kontakt struktúrát, a ξ_{st} *standard kontakt struktúrát* határoz meg.

3-dimenzióban

$\mathbb{R}^3$-ban a standard kontakt struktúra cilindrikus (r, ϕ, z) koordinátákban a következő formával adható meg: $\lambda = dz + r^2 \cdot d\phi$. Rajzban:



Sehol sem integrálhatósági feltétel

Egy 3-dimenziós sokaságra $\lambda \wedge d\lambda = 0$ azt jelentené, hogy a $\xi = \ker \lambda$ altér-mező *integrálható* (ez Frobenius tétele), vagyis beágyazott felületek érintővektoraiként állítható elő. A kontakt feltétel: sehol sem integrálható, maximálisan 'csavarodott' tulajdonságot ad.

A fogalom először Sophus Lie egy 1872-es cikkében jelenik meg, mint *kontakt transzformációk* (Berührungstransformationen = érintkezési transzformációk).

Kähler sokaságok

Definíció

Egy Z komplex sokaság **Kähler** *ha létezik rajta egy olyan g metrika, hogy az $\omega(v, w) = g(iv, w)$ 2-forma szimplektikus.*

Ilyen például minden komplex projektív tér, és ezek komplex részsokaságai.

Egy szimplektikus struktúra tehát a komplex projektív sokaság fogalmának általánosítása.

Kähler sokaságok

Definíció

Egy Z komplex sokaság **Kähler** *ha létezik rajta egy olyan g metrika, hogy az $\omega(v, w) = g(iv, w)$ 2-forma szimplektikus.*

Ilyen például minden komplex projektív tér, és ezek komplex részsokaságai.

Egy szimplektikus struktúra tehát a komplex projektív sokaság fogalmának általánosítása.

Stein tartományok

Egy X sima sokaság differenciálható módon beágyazható valamely $\mathbb{R}^N$-be (Whitney tétele szerint). Ha Z komplex, akkor a kompakt esetben (a maximum elv szerint) holomorfan Z soha nem ágyazható be $\mathbb{C}^N$-be.

Ha Z nem-kompkat (de komplex), ez néha megtehető: az ilyen (tehát valamely $\mathbb{C}^N$ holomorf részeként előálló) komplex sokaságokat *Stein sokaságoknak* hívják.

Stein tartományok

Egy X sima sokaság differenciálható módon beágyazható valamely $\mathbb{R}^N$-be (Whitney tétele szerint). Ha Z komplex, akkor a kompakt esetben (a maximum elv szerint) holomorfan Z soha nem ágyazható be $\mathbb{C}^N$-be.

Ha Z nem-kompkat (de komplex), ez néha megtehető: az ilyen (tehát valamely $\mathbb{C}^N$ holomorf részeként előálló) komplex sokaságokat *Stein sokaságoknak* hívják.

Betölthetőség

Legyen $Z \subset \mathbb{C}^N$ egy Stein sokaság, es vegyük a $Z_R = Z \cap B_0(R)$ metszetet (ahol $B_0(R)$ az origó középpontú, R sugarú tömör gömb); Z_R egy ún. Stein tartomány lesz, aminek ∂Z_R peremén a $T(\partial Z_R) \cap iT(\partial Z_R)$ metszet egy ξ altérmezőt ad.

Az így kapott ξ mező egy kontakt struktúra lesz, melyet *Stein betölthető* kontakt struktúrának nevezünk.

Betölthetőség

Legyen $Z \subset \mathbb{C}^N$ egy Stein sokaság, es vegyük a $Z_R = Z \cap B_0(R)$ metszetet (ahol $B_0(R)$ az origó középpontú, R sugarú tömör gömb); Z_R egy ún. Stein tartomány lesz, aminek ∂Z_R peremén a $T(\partial Z_R) \cap iT(\partial Z_R)$ metszet egy ξ altérmezőt ad.

Az így kapott ξ mező egy kontakt struktúra lesz, melyet *Stein betölthető* kontakt struktúrának nevezünk.

Betölthetőség

Tehát kontakt struktúrák Stein sokaságok 'peremén' természetes módon jelennek meg. Ez a konstrukció adja kontakt struktúrák (egyik) leggazdagabb forrását.
Hasonló konstrukció működik peremes szimplektikus sokaságokra is, ezek adják a *szimplektikusan betölthető* kontakt struktúrákat.

Reeb dinamika, Weinstein sejtése

Legyen ξ egy kontakt struktúra, amit egy (nem egyértelmű) λ kontakt 1-forma definiál. Legyen $V = \{v_x\}$ egy olyan vektormező (vagyis minden pontban egy érintővektor) X-en, amire

- $d\lambda(v_x, w) = 0$ minden $w \in T_xX$-re, és minden $x \in X$-re, és
- $\lambda(v_x) = 1$ minden $x \in X$-re (normálási feltétel).

A V vektormező neve: Reeb vektormező, ezt λ meghatározza.

A V vektormező által meghatározott dinamikai rendszer elég speciális:

Sejtés (Weinstein Sejtése)

Egy Reeb vektormezőnek mindig van zárt orbitja.

(3-dimenziós sokaságokra ez Taubes egy tétele, a bizonyítás Seiberg-Witten elméleten és holomorf görbék alkalmazásán alapul.)

Reeb dinamika, Weinstein sejtése

Legyen ξ egy kontakt struktúra, amit egy (nem egyértelmű) λ kontakt 1-forma definiál. Legyen $V = \{v_x\}$ egy olyan vektormező (vagyis minden pontban egy érintővektor) X-en, amire

- $d\lambda(v_x, w) = 0$ minden $w \in T_x X$-re, és minden $x \in X$-re, és
- $\lambda(v_x) = 1$ minden $x \in X$-re (normálási feltétel).

A V vektormező neve: Reeb vektormező, ezt λ meghatározza.
A V vektormező által meghatározott dinamikai rendszer elég speciális:

Sejtés (Weinstein Sejtése)

Egy Reeb vektormezőnek mindig van zárt orbitja.

(3-dimenziós sokaságokra ez Taubes egy tétele, a bizonyítás Seiberg-Witten elméleten és holomorf görbék alkalmazásán alapul.)

Kontakt és szimplektikus közötti kapcsolat: kontakt sokaság szimplektizáltja

Egy kontakt sokaság mindig megad egy szimplektikusat:

Definíció

Legyen (M, ξ) egy adott kontakt sokaság és λ egy kontakt forma. Ekkor az $\eta = e^t\lambda$ 1-formát véve az $M \times (0, \infty)$ szorzaton, a $Symp(M, \xi) = (M \times (0, \infty), d\eta)$ **szimplektizáltat** *kapjuk.*

Szimplektikus struktúra: lehetővé teszi, hogy az X sokaságon 'holomorf' (pontosabban pszeudo-holomorf) módszereket alkalmazzunk: ezeken a sokaságokon mindig van *majdnem-komplex struktúra* (egy olyan $J\colon TX \to TX$ leképezés, amire $J \circ J = -Id$), ami az ω szimplektikus struktúrával *majdnem-Kähler*-ré teszi a sokaságot. Ennek segítségével értelmezhető egy $f\colon C \to X$, C komplex sokaságon (pl. $\mathbb{C}$-n) értelmezett függvény komplex deriválhatósága.

A Reeb vektormező zárt orbitjai, és a szimplektizáltban levő (pszeudo-)holomorf görbék egy 'homológia-elméletet' (az ún. *kontakt homológiát*) definiálják.

Szimplektikus struktúra: lehetővé teszi, hogy az X sokaságon 'holomorf' (pontosabban pszeudo-holomorf) módszereket alkalmazzunk: ezeken a sokaságokon mindig van *majdnem-komplex struktúra* (egy olyan $J\colon TX \to TX$ leképezés, amire $J \circ J = -Id$), ami az ω szimplektikus struktúrával *majdnem-Kähler*-ré teszi a sokaságot. Ennek segítségével értelmezhető egy $f: C \to X$, C komplex sokaságon (pl. $\mathbb{C}$-n) értelmezett függvény komplex deriválhatósága.

A Reeb vektormező zárt orbitjai, és a szimplektizáltban levő (pszeudo-)holomorf görbék egy 'homológia-elméletet' (az ún. *kontakt homológiát*) definiálják.

Kontakt topológia

A kontakt topológia két alapvető kérdése:

1. Mely sima sokaságokon létezik kontakt struktúra?
2. Ha egy X sokaságon van kontakt struktúra, akkor soroljuk fel az összeset.

Majdnem-kontakt struktúrák

Ha λ egy kontakt 1-forma M-en, akkor M-en létezik egy olyan (λ, ω) pár (amiben λ egy 1-forma, és ω egy 2-forma), hogy $\lambda \wedge \omega^{\wedge n} > 0$ (válasszuk $\omega = d\lambda$-t).

Egy fenti (λ, ω) pár: majdnem-kontakt struktúra. Ennek létezése nyilván szükséges ahhoz, hogy M-en legyen kontakt struktúra, és ennek létezése algebrai topológiai mószerekkel eldönthető. (Ekvivalens avval, hogy a TM nyaláb felhasad $\mathbb{R} \oplus E$ összegre, ahol E egy komplex n-dimenziós nyaláb.)

Majdnem-kontakt struktúrák

Ha λ egy kontakt 1-forma M-en, akkor M-en létezik egy olyan (λ, ω) pár (amiben λ egy 1-forma, és ω egy 2-forma), hogy $\lambda \wedge \omega^{\wedge n} > 0$ (válasszuk $\omega = d\lambda$-t).
Egy fenti (λ, ω) pár: majdnem-kontakt struktúra. Ennek létezése nyilván szükséges ahhoz, hogy M-en legyen kontakt struktúra, és ennek létezése algebrai topológiai mószerekkel eldönthető.
(Ekvivalens avval, hogy a TM nyaláb felhasad $\mathbb{R} \oplus E$ összegre, ahol E egy komplex n-dimenziós nyaláb.)

Majdnem-kontakt struktúrák

Egy Y 3-sokaságra egy majdnem-kontakt struktúra egy irányított 2-mező (vagyis minden $T_y Y$ érintőtérben egy irányított 2-dimenziós altér).

Majdnem-kontakt struktúrákat jónéhány esetben expliciten osztályozni lehet, például S^{2n+1} gömbfelületekre, vagy 3- és 5-dimenziós sokaságokra.

Majdnem-kontakt struktúrák

Egy Y 3-sokaságra egy majdnem-kontakt struktúra egy irányított 2-mező (vagyis minden $T_y Y$ érintőtérben egy irányított 2-dimenziós altér).
Majdnem-kontakt struktúrákat jónéhány esetben expliciten osztályozni lehet, például S^{2n+1} gömbfelületekre, vagy 3- és 5-dimenziós sokaságokra.

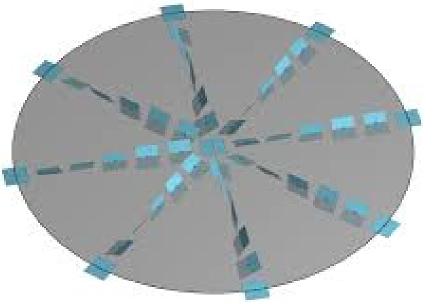
A három-dimenziós eset

Definíció

Legyen (Y, ξ) egy adott kontakt 3-sokaság, és $D^2 \subset Y$ egy beágyazott körlap. A körlap **túlcsavart** *(overtwisted) ha pereme mentén $\xi|_{\partial D^2} = TD^2|_{\partial D^2}$. A ξ kontakt struktúra* **túlcsavart** *ha van benne túlcsavart körlap.*

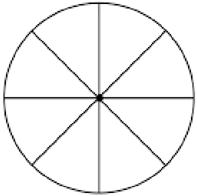
Például: a $\lambda_{OT} = \cos r \cdot dz + r \sin r \cdot d\phi$ kontakt 1-forma az $\mathbb{R}^3$-on (az (r, ϕ, z) cilindrikus koordinátákban), az $\{r \leq \pi, z = 0\}$ körlappal ilyen. (Emlékeztetőül: a standard forma $\lambda = dz + r^2 \cdot d\phi$.)

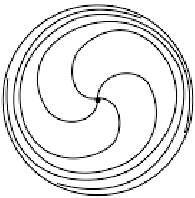
A túlcsavart kontakt struktúra rajza



Az OT körlap rajza

Ha a ξ altérmezőt elmetsszük a D túlcsavart körlap TD érintőnyalábjával, akkor a keletkező (szinguláris) mező integrálgörbéi így néznek ki. (Bal oldalon a lapos körlap, mellette a kicsit felpúposított esete.)





Klasszifikációs tételek

Tétel (Eliashberg, 1990, Lutz, Martinet, 60-as évek)

Legyen Y egy 3-dimenziós sokaság. Minden majdnem-kontakt struktúra Y-on pontosan egy OT kontakt struktúrát tartalmaz. (Vagyis minden 2-dimenziós irányított altér-mező pontosan egy OT kontakt struktúrába mozgatható.)

Következmény

Legyen ξ_1, ξ_2 egy Y 3-sokaságon lévő olyan kontakt struktúrák párja, melyek homotópak (mint majdnem-kontakt struktúrák, vagyis mint irányított 2-mezők). Egy tetszőleges ξ_{OT} túlcsavart struktúrára ekkor $\xi_1 \# \xi_{OT}$ és $\xi_2 \# \xi_{OT}$ már azonosak lesznek.

Feszes struktúrák

Definíció

Egy ξ kontakt struktúra akkor **feszes** *(tight), ha nem túlcsavart.*

Tétel

Ha ξ (Stein vagy szimplektikusan) betölthető, akkor feszes.

Feszes struktúrák sokkal nehezebben találhatóak, és sokkal többet mondanak a sokaság geometriájáról. Pl. ha ξ feszes Y-on és $\Sigma \subset Y$ egy g génuszú 2-dimenziós felület, akkor

$$|\langle c_1(\xi), [\Sigma] \rangle| \leq 2g - 2.$$

Feszes struktúrák létezése azonban általában még nem tisztázott.

Létezési tétel feszes kontakt struktúrákra

Perelman tétele szerint: Minden 3-sokaság hiperbolikus és Seifert fibrált részekből tehető össze S^2 és T^2 menti ragasztásokkal. Nem-triviális T^2-menti ragasztásokra mindig van (végtelen sok különböző) feszes struktúra, S^2 menti ragasztásokra pedig a komponensek feszes struktúrái 'összeadódnak'. Tehát a hiperbolikusak és a Seifert fibráltak az igazán érdekesek.

Tétel (Lisca-S., 2007)

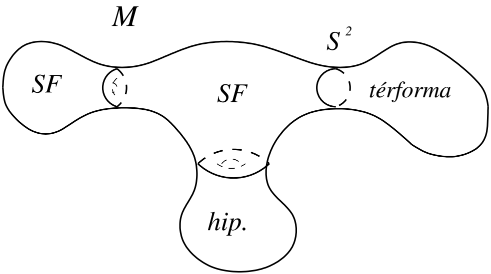
Feszes kontakt struktúrák létezése Seifert fibrált 3-sokaságokon teljesen ismert: mindig létezik, kivéve az $S^3_{2n-1}(T_{2,2n+1})$ $n \in \mathbb{N}$ sokaságokon.

Létezési tétel feszes kontakt struktúrákra

Perelman tétele szerint: Minden 3-sokaság hiperbolikus és Seifert fibrált részekből tehető össze S^2 és T^2 menti ragasztásokkal. Nem-triviális T^2-menti ragasztásokra mindig van (végtelen sok különböző) feszes struktúra, S^2 menti ragasztásokra pedig a komponensek feszes struktúrái 'összeadódnak'. Tehát a hiperbolikusak és a Seifert fibráltak az igazán érdekesek.

Tétel (Lisca-S., 2007)

Feszes kontakt struktúrák létezése Seifert fibrált 3-sokaságokon teljesen ismert: mindig létezik, kivéve az $S^3_{2n-1}(T_{2,2n+1})$ $n \in \mathbb{N}$ sokaságokon.



Speciális Seifert fibráltakra: feszes struktúrák teljes klasszifikációja is megvan (Wu, Ghiggini, Ghiggini-Lisca-S.).

Kontakt struktúrák létezése magasabb dimenzióban

Legyen M egy $(2n+1)$-dimenziós sokaság.
Egy Stein betölthető struktúra létezése: topológiai feltétel.

Tétel (Eliashberg, 1991)

Egy M $(2n+1)$-sokaságon $n \geq 2$ esetén pontosan akkor van Stein betölthető kontakt struktúra, ha $M = \partial W^{2n+2}$, ahol W^{2n+2} kompakt, van rajta majdnem-komplex struktúra (egy $J\colon TW \to TW$ fibrum-tartó leképezés, melyre $J \circ J = -Id$), és egy olyan $f\colon W \to \mathbb{R}$ függvény, melynek minden kritikus pontja legfeljebb $(n+1)$-indexű.

(Az index a $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ szimmetrikus mátrixból számítható ki.)

Kontakt struktúrák létezése magasabb dimenzióban

Legyen M egy $(2n+1)$-dimenziós sokaság.
Egy Stein betölthető struktúra létezése: topológiai feltétel.

Tétel (Eliashberg, 1991)

Egy M $(2n+1)$-sokaságon $n \geq 2$ esetén pontosan akkor van Stein betölthető kontakt struktúra, ha $M = \partial W^{2n+2}$, ahol W^{2n+2} kompakt, van rajta majdnem-komplex struktúra (egy $J\colon TW \to TW$ fibrum-tartó leképezés, melyre $J \circ J = -Id$), és egy olyan $f\colon W \to \mathbb{R}$ függvény, melynek minden kritikus pontja legfeljebb $(n+1)$-indexű.

(Az index a $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ szimmetrikus mátrixból számítható ki.)

Ezalapján: obstrukció adható, mely egy (M, ζ) majdnem-kontakt sokaságra pontosan akkor tűnik el, ha létezik Stein betölthető kontakt struktúra M-en ami ζ-val homotóp (Bowden-Crowley-S., 2012). Ebből néhány következmény:

Tétel (Bowden-Crowley-S, 2012)

- *Ha M 7-dimenziós, $\pi_1(M) = 1$ és $\pi_2(M)$ szabad Abel, akkor minden majdnem-kontakt struktúra M-en homotóp egy (Stein betölthető) kontakttal.*
- *Ha Σ egy olyan egzotikus gömb (tehát az S^{2n+1} gömbbel homeomorf, de nem diffeomorf sokaság), mely nem határol spin sokaságot (ilyen van minden $8k+1$ alakú dimenzióban), akkor Σ-n nincs Stein betölthető kontakt struktúra.*
- *Az S^{8k-1} $k \geq 2$ esetén gömbön van olyan majdnem-kontakt struktúra, ami nem homotóp Stein betölthetővel.*

Kontakt struktúrák szorzatokon

Tétel

- *(Geiges-S, 2010) Ha X 4-dimenziós szimplektikus, akkor $X \times S^1$-en van kontakt struktúra.*
- *(Bourgeois, 2004) Ha (M, ξ) egy kontakt sokaság és Σ egy a gömbtől különböző felület, akkor $M \times \Sigma$-n is van kontakt struktúra.*
- *(Bowden-CrowleyS, 2012) A fenti állítás $\Sigma = S^2$-re is igaz.*

Tétel (Casals-Pancholi-Presas, Etnyre, 2013)

Legyen ζ egy majdnem-kontakt struktúra az M 5-dimenziós sokaságon. Ekkor van egy ζ-val homotóp ξ kontakt struktúra M-en.

Kontakt struktúrák szorzatokon

Tétel

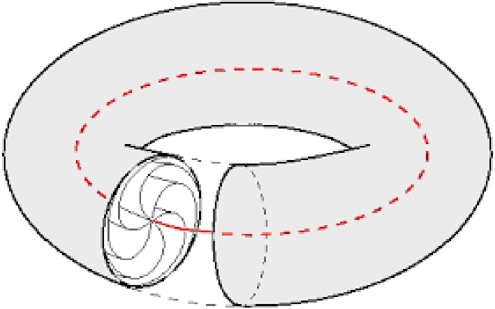
- *(Geiges-S, 2010) Ha X 4-dimenziós szimplektikus, akkor $X \times S^1$-en van kontakt struktúra.*
- *(Bourgeois, 2004) Ha (M, ξ) egy kontakt sokaság és Σ egy a gömbtől különböző felület, akkor $M \times \Sigma$-n is van kontakt struktúra.*
- *(Bowden-CrowleyS, 2012) A fenti állítás $\Sigma = S^2$-re is igaz.*

Tétel (Casals-Pancholi-Presas, Etnyre, 2013)

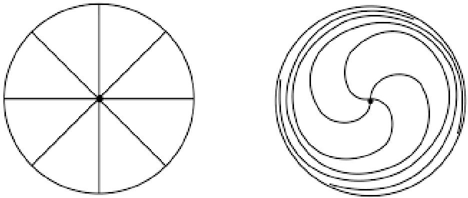
Legyen ζ egy majdnem-kontakt struktúra az M 5-dimenziós sokaságon. Ekkor van egy ζ-val homotóp ξ kontakt struktúra M-en.

Túlcsavarás magas dimenzióban

A túlcsavart tulajdnoság általánosítása: Niederkrüger (2006): egy $(2n+1)$-dimenziós (M, ξ) kontakt sokaságban egy *plastikstufe* P (ez túlcsavart körlapok egy $(n-1)$-dimenziós családja). A definíció helyett egy kép: 5-dimenzióban túlcsavart körlapok egy 1-dimenziós (S^1) családja (ismét a $TP \cap \xi$ integráljainak lerajzolásával):



Emlékeztetőül

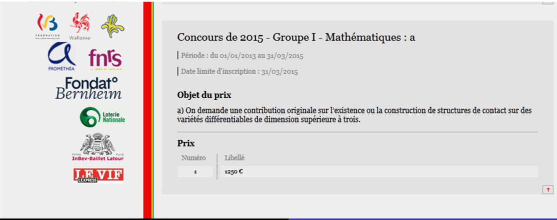


Eredmények plastikstufe-kről

Tétel

- *(Niederkrüger) Ha (M, ξ) tartalmaz egy P plastikstufe-t, akkor nem betölthető.*
- *(Etnyre-Pancholi) Ha M-en van kontakt struktúra, akkor olyan is van, amiben van plastikstufe.*
- *(Murphy-Niederkrüger-Plamenevskaya-S) Ha $M \times [0,1]$-en van egy olyan Stein struktúra, ami $M \times \{i\}$-n a ξ_i $(i = 0, 1)$ kontakt struktúrát indukálja, és (M_P, ξ_P) tartalmaz egy (speciális) plastikstufe-t, akkor $\xi_1 \# \xi_P$ és $\xi_2 \# \xi_P$ megegyeznek.*

A belga király díja



"We ask for an original contribution on the existence or the construction of contact structures on differentiable manifolds of dimension greater than three. These contributions should arise between January 1st 2013 and March 31st 2015 and be submitted to the Academy by the latter date."

The financial amount of the prize (1250 Euro) is quite small, but I hope that the attention of the Royal Academy of Belgium to such an important question in our field can compensate for that. Please pass along this information to anyone you feel might be interested. Best wishes for successful research

A tétel

Tétel (Borman-Eliashberg-Murphy, 2014)

- *Legyen ζ egy majdnem-kontakt struktúra az M sokaságon. Ekkor van rajta egy olyan ξ kontakt struktúra, mely ζ majdnem-kontakttal homotóp.*
- *ξ választható úgy, tartalmaz egy speciális plastikstufe-t.*
- *Ha ξ_1, ξ_2 homotópak, és mindkettő tartalmaz (speciális) plastikstufe-t akkor kontakt homotópak.*

A szerzők



A bizonyítás ötlete

- (Gromov, 70-es évek) Ha M nem-kompakt, akkor minden majdnem-kontakt struktúra homotóp egy kontakttal.
- Egy M kompakt sokaságra vegyük az $M - \{p\}$ egy pontjától megfosztott sokaságot, és ezen vegyünk egy kontakt struktúrát.
- Próbáljuk meg a 'perem' S^{2n} kis környezetén lévő kontakt struktúrát a D^{2n+1} golyóra beterjeszteni.
- Ehhez model 'beterjeszthető' struktúrák kellenek (itt játszik szerepet a magas dimenziós túlcsavart diszk), illetve az S^{2n}-menti struktúrák normalizálása.