Nyalábok, konnexiók

Stipsicz András

1. fejezet

Nyalábok

1.1 Fibrált nyalábok

A különböző karakterisztikus osztályok definiálása és fontos tulajdonságaik tárgyalása előtt röviden tekintsük át a fibrált nyalábok elméletének alapjait. Legyen tehát G rögzített Lie-csoport. Tegyük fel, hogy G a P topologikus téren (jobbról) szabadon hat, vagyis adott egy folytonos $f\colon P \times G \to P$

$$(p, g) \mapsto p \cdot g$$

leképezés, melyre $p \cdot g = p$ esetén $g = 1$ áll fenn. A P/G faktort jelölje M, a $P \to M$ faktorizáló leképezést pedig π.

1.1.1 definíció. A $\pi\colon P \to M$ leképezés *principális G-nyalábot* ad, amennyiben minden $m \in M$ pontnak létezik olyan U környezete, hogy $\pi^{-1}(U)$ az $U \times G$ direkt szorzattal G-ekvivariáns módon azonosítható.

A definícióban megkövetelt tulajdonság azt jelenti, hogy a $\pi\colon P \to M$ fibrálás lokálisan $U \times G \to U$ alakú, vagyis *lokálisan triviális*.

1.1.2 feladat. Lássuk be, hogy ha G kompakt, akkor minden P-n adott szabad G-hatás lokálisan triviális.

1.1.3 definíció. Legyen $\pi\colon P \to M$ egy principális G-nyaláb. Egy $m \in M$ pontra $\pi^{-1}(m)$ alteret a fibrálás (m feletti) *fibrumának (vagy rostjának)* nevezzük és alkalmanként P_m-mel jelöljük. Egy $\sigma\colon M \to P$ leképezés a nyaláb *szelése* amennyiben $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$.

Vegyük észre, hogy egy principális G-nyaláb minden fibruma (nem kanonikus módon) a G csoporttal azonosítható: $p \in P_m$ választással a $g \mapsto p \cdot g$ leképezés egy $G \cong P_m$ bijekciót ad. (A fibrumok tehát "affin értelemben" Lie-csoportok — amint kijelöljük P_m-ben az egységelemet, az G-vel izomorf csoportstruktúrát kap.)

A principális nyaláb fenti definíciója könnyen kiterjeszthető tetszőleges más fibrum esetére is. Legyen tehát F egy rögzített topologikus tér, G egy Lie-csoport, és rögzítsük G egy hatását F-en, vagyis vegyünk egy $G \to \mathrm{Aut}(F)$ homomorfizmust. (A továbbiakban — az egyszerűség kedvéért — G-t mint $\mathrm{Aut}(F)$ részcsoportját fogjuk tekinteni.) Ha E és B topologikus terek, $\pi\colon E \to B$ pedig egy folytonos leképezés, akkor a (π, E, B, F, G) ötöst F fibrumú, G struktúra-csoportú *fibrált nyalábnak* nevezzük, ha

(1) minden $b \in B$-re létezik egy $\varphi_b\colon \pi^{-1}(b) \to F$ homeomorfizmus;

(2) $\pi\colon E \to B$ lokálisan triviális, vagyis minden $b \in B$ pontnak létezik olyan $U \subset B$ nyílt környezete és ahhoz egy $\phi_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$, melyre $\pi = \mathrm{pr}_1 \circ \phi_U$ (itt pr_1 a direkt szorzat első komponensére való vetítését jelöli);

(3) továbbá B-nek létezik olyan $\{U_\alpha\}$ nyílt fedése, hogy a U_α nyílt halmazok felett a nyaláb triviális (mint (2)-ben fent), és rögzített $u \in U_\alpha \cap U_\beta$ pontra a $\phi_{U_\alpha} \circ \phi_{U_\beta}(., u)\colon F \to F$ leképezés egy G-beli elem.

1.1.4 definíció. Az E teret a nyaláb *totális terének*, B-t pedig *bázisának* hívjuk; F a nyaláb *fibruma*. A fenti (3) pont által garantált $g_{\alpha\beta} = \phi_{U_\alpha} \circ \phi_{U_\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to G$ rendszert a nyaláb *kociklus-struktúrájának* nevezzük. Egy $\sigma: B \to E$ leképezés a nyaláb *szelése* ha $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_B$.

1.1.5 feladatok. (a) Lássuk be, hogy egy principális nyaláb egyben (G fibrumú) fibrált nyaláb is.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\{g_{\alpha\beta}\}$ egy kociklus-struktúra, akkor $u \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ esetén $g_{\alpha\beta}(u) \cdot g_{\beta\gamma}(u) \cdot g_{\gamma\alpha}(u) = 1$ és $g_{\alpha\beta}(u) = g_{\beta\alpha}^{-1}(u)$.

1.1.6 megjegyzés. Könnyen láthaó, hogy a fenti 1.1.5(b) feladat állítása megfordítható: ha $\{U_\alpha\}$ a B topologikus tér egy fedése és $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to G$ folytonos leképezések, melyekre $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} = 1$ és $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ teljesül, akkor létezik egy olyan $\pi: E \to B$ nyaláb, melynek $\{g_{\alpha\beta}\}$ a kociklus-struktúrája. Vegyük ehhez az $\amalg U_\alpha \times F$ diszjunkt uniót, és azonosítsuk az $(u_1, f_1) \in U_\alpha \times F$, $(u_2, f_2) \in U_\beta \times F$ elemeket akkor, ha $u_1 = u_2 = u \in U_\alpha \cap U_\beta$ és $f_2 = g_{\alpha\beta}(u) f_1$. Az így kapott faktortér (az első koordinátára történő vetítéssel) egy olyan $\pi: E \to B$ (F fibrumú, G struktúra-csoportú) nyalábot ad, melynek éppen $\{g_{\alpha\beta}\}$ lesz (az $\{U_\alpha\}$ fedéshez tartozó) kociklus-struktúrája.

1.1.7 példák. (a) A $B \times F \to B$ direkt szorzat tetszőleges G-re fibrált nyalábot, az ún. *triviális nyalábot* ad.

(b) Érintőnyaláb: Egy M sima n–dimenziós sokaságra vegyünk egy atlaszt és tekintsük az $U_\alpha \cap U_\beta$ metszeten a

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

mátrixokkal megadott kociklus-struktúrát. (Itt $\{x_1, \ldots, x_n\}$ és $\{y_1, \ldots, y_n\}$ az U_α és U_β térképeken lévő lokális koordinátákat jelöli.) A kapott mátrixokat $Aut(\mathbb{R}^n) = GL(n; \mathbb{R})$-beli elemeknek tekintve a kapott $\mathbb{R}^n$–fibrumú nyalábot az M sima sokaság *érintőnyalábjának* nevezzük.

Egy $\pi: E \to B$ fibrált nyaláb egy principális nyalábot határoz meg a következő módon. Vegyük $\pi: E \to B$ egy kociklus-struktúráját és ebből a 1.1.6 megjegyzésben leírtak szerint, a $G \times G \to G$ jobbszorzással mint G-hatással készítsünk egy G fibrumú nyalábot. Az így kapott $P \to B$ nyalábról könnyen belátható, hogy egy principális G-nyaláb. Megfordítva, egy principális G-nyaláb és egy $\lambda: G \to \mathrm{Aut}(F)$ baloldali G-hatás (a 1.1.6 megjegyzésben leírtak szerint, kociklus-struktúráján keresztül) egy F fibrumú $\pi: E \to B$ nyalábot határoz meg, melyet a P-hez λ-val *asszociált* nyalábnak hívunk és $P \times_\lambda F$-fel jelölünk. Egyszerűen látható be, hogy $E = P \times F/\approx$ ahol $(p, f) \approx (pg, \lambda(g^{-1})f)$ minden $g \in G$-re.

1.1.8 feladatok. (a) Lássuk be, hogy egy $P \to B$ principális G-nyalábnak pontosan akkor van szelése, ha a nyaláb triviális.

(b) Azonosítsuk az $E \to B$ nyaláb szeléseit az $\{f: P_E \to F \mid f(pg) = \lambda(g) f(p) \quad \forall g \in G\}$ G-ekvivariáns leképezések terével. (Itt P_E az $E \to B$ nyalábhoz tartozó principális G-nyalábot jelöli.)

(c) Lássuk be, hogy nem minden minden G fibrumú nyaláb principális. (Találjunk olyan példát, melynek fibruma G, nem triviális, de van szelése, pl. a tautologikus kvaternió nyaláb principális nyalábjához asszocialjunk egy $SU(2)$–fibrumú nyalábot az

$$ad: G \to Aut(G)$$

$$ad_g(h) = g^{-1} h g$$

reprezentációval.

Nem minden G fibrumú nyaláb principális, hiszen....

Egy $(F, f): (E, B) \to (E', B')$ leképezés-párt *nyalábleképezésnek* hívunk ha $F: E \to E'$, $f: B \to B'$ és a π, π' projekciókra

$$\pi' \circ F = f \circ \pi$$

áll fenn. Két B feletti E_1, E_2 nyaláb *izomorf* ha létezik olyan $F: E_1 \to E_2$ leképezés, melyre (F, id_B) nyalábleképezés.

Egy $f\colon B' \to B$ leképezésre és $\pi\colon E \to B$ nyalábra az $f^*E \to B'$ *visszahúzott nyalábot* — vagy az E nyaláb f menti visszahúzottját — az $f^*E = \{(e,b) \in E \times B' \mid \pi(e) = f(b)\}$ formulával definiálhatjuk. Az $f^*E \to B'$ vetítést a második faktorra való projekció megszorítása adja. Ugyanezt természetesen a kociklus-struktúrákkal is könnyen megfogalmazatjuk: ha $(\{U_\alpha\}, \{g_{\alpha\beta}\})$ egy kociklus struktúra a $\pi\colon E \to B$ nyalábra és $f\colon B' \to B$ egy folytonos leképezés, akkor az

$$(\{f^{-1}(U_\alpha)\}, \{f \circ g_{\alpha\beta}\})$$

pár egy kociklus-struktúrát ad egy B' feletti nyalábra, mely éppen a fent definiált f^*E lesz.

Sok esetben (az $\{U_\alpha$ fedés esetleges megváltoztatásával és a $\{g_{\alpha\beta}\}$ függvények homotópiájával) a kociklus-struktúráról feltehető, hogy valójában egy $H < G$ részcsoportba mutat. (Minden olyan H részcsoportra megtehető ez például, mely G-nek deformációs retraktuma.) Ekkor azt mondjuk, hogy az $E \to B$ struktúra-csoportja G-ről H-ra redukálható.

1.1.9 feladat. Lássuk be, hogy $E \to B$ pontosan akkor triviális, ha struktúra-csoportja az $\{1\} \leq G$ triviális csoportra redukálható.

1.2 Vektornyalábok

Legyen F az n-dimenziós valós vektortér, G pedig a $GL(n;\mathbb{R}) = \{A\colon F \to F \mid \det A \neq 0\}$ csoport részcsoportja. Ekkor egy $\pi\colon E \to B$, F fibrumú, G struktúra-csoportú nyalábot (valós) n-dimenziós *vektornyalábnak* nevezünk. Hasonlóan, ha F komplex vektortér és $G \leq GL(n;\mathbb{C})$, akkor a komplex vektornyaláb fogalmát kapjuk.

1.2.1 feladat. Lássuk be, hogy ha $\pi\colon E \to B$ egy vektornyaláb, akkor a szelések $\Gamma(E)$ tere természetes módon látható el vertortér truktúrával.

Könnyen belátható, hogy egy differenciálható sokaság érintőnyalábja vektornyaláb. A következő példa központi szerepet fog jásztszani későbbi vizsgálataink során.

1.2.2 példa. Legyen $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ és vegyük a $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\mathbb{C}^*$ faktort. A $\tau_{\mathbb{C}}(n) \to \mathbb{CP}^n$ *tautologikus* nyalábot, mint $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ részhalmazát a

$$\tau_{\mathbb{C}}(n) = \{(l,p) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid p \in l\}$$

definíció adja meg. Az első koordinátára való vetítést $\tau_{\mathbb{C}}(n)$-re megszorítva egy $\tau_{\mathbb{C}}(n) \to \mathbb{CP}^n$ leképezést kapunk, melyről könnyen igazolható, hogy egy 1-dimeniós komplex nyaláb — ún. komplex vonalnyaláb. Hasonló definícióval valós és kvaternió vonalnyalábok kaphatók az $\mathbb{RP}^n$ és $\mathbb{HP}^n$ projektív terek felett; ezeket a továbbiakban $\tau_{\mathbb{R}}(n) \to \mathbb{RP}^n$ és $\tau_{\mathbb{H}}(n) \to \mathbb{HP}^n$ fogja jelölni.

A Gram-Schmidt féle ortogonalizációs eljárást alkalmazva egyszerűen belátható, hogy egy vektornyaláb struktúra-csoportja mindig $O(n)$-re (ill. a komplex esetben $U(n)$-re) reduklálható. Nevezetesen, egy vonalnyaláb principális nyalábja $O(1) = \mathbb{Z}_2$ (a komplex esetben $U(1) = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$) struktúra-csoportúnak választható.

1.2.3 feladatok. (a) Lássuk be, hogy egy X topologikus tér kettős fedései a $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ kohomológia-csoport elemeivel bijekcióba állíthatók. Vegyük észre, hogy X kettős fedései éppen az X feletti principális $\mathbb{Z}_2$-nyalábоknak felelnek meg.

(b) Mutassuk meg, hogy $\tau_{\mathbb{R}}(1) \to \mathbb{RP}^1$ éppen a Möbius szalag.

(c) Lássuk be, hogy $\tau_{\mathbb{C}}(1) \to \mathbb{CP}^1$ principális S^1-nyalábja a $\pi\colon S^3 \to S^2$ Hopf-fibrálással azonos.

(d) Bizonyítsuk be, hogy a $\tau_{\mathbb{H}}(1) \to \mathbb{HP}^1$ struktúra-csoportja $SU(2)$-re redukálható, és határozzuk meg a megfelelő principális $SU(2)$-nyaláb totális terét.

Természetesen vektornyalábokat is vissza lehet húzni; mivel azonban mátrixokkal további műveletek is elvégezhetők, definiálni tudjuk vektornyalábok összegét, duálisát, komplexifikáltját, tenzorszorzatát és determinánsát.

Adjuk meg az $\alpha\colon GL(n;\mathbb{R}) \times GL(m;\mathbb{R}) \to GL(n+m;\mathbb{R})$ homomorfizmust az $(A,B) \to \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ formulával. Egy $E_1 \to B$ n-dimenziós és egy $E_2 \to B$ m-dimenziós vektornyaláb kociklus-struktúráját α-val komponálva ilymódon egy $(n+m)$-dimenziós vektornyalábot kapunk, amit az $E_1 \oplus E_2$ összegnek nevezünk. (Ugyanígy adhatunk össze komplex és kvaternió nyalábokat is.) A $t\colon GL(n;\mathbb{R}) \times GL(m;\mathbb{R}) \to GL(nm;\mathbb{R})$ tenzorszorzást alkalmazva az $E_1 \otimes E_2$ tenzorszorzat nyalábot, míg a $c\colon GL(n;\mathbb{R}) \to GL(n;\mathbb{C})$ beágyazást alkalmazva az $E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ komplexifikáltat kapjuk. A kociklus-struktúrát a $\det\colon GL(n;\mathbb{R}) \to GL(1;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ homomorfizmussal komponálva a $\det E$ determináns vonalnyaláb adódik; hasonló konstrukciókat kapunk természetesen a komplex és kvaternió esetben is. Hasonló egyszerű operációkkal definiálhatók a dualis es konjugalt nyalábok.

Vegyük észre, hogy egy B tér feletti vonalnyalábok a tenzorszorzatra, mint műveletre nézve zártak. Nem nehéz belátni, hogy tetszőleges $L \to B$ vonalnyalábra létezik olyan $L' \to B$, hogy $L \otimes L'$ triviális — L'-t választhatjuk L inverzének, vagyis L' egy kociklus-struktúráját választhatjuk $h_{\alpha\beta}(u) = g^{-1}_{\alpha\beta}(u)$-nak, amennyiben $\{g_{\alpha\beta}\}$ L egy kociklus-struktúrája. Következésképp a B feletti vonalnyalábok (a tenzorszorzásra nézve) csoportot alkotnak.

1.2.4 feladatok. (a) Bontsuk fel S^1-et két intervallum uniójára és határozzuk meg $\tau_{\mathbb{R}}(1)$ egy kociklus-struktúráját. Adjuk meg az S^1 feletti valós vonalnyalábok csoportját.

(b) Oldjuk meg a fenti feladatot S^2 feletti komplex vonalnyalábokra.

(c) A 1.2.3(a) feladat eredményét alkalmazva azonosítsuk egy B tér feletti vonalnyalábok csoportját a $H^1(B;\mathbb{Z}_2)$ csoporttal.

2. fejezet

Nyalábok homotopikus elmélete

2.1 Klasszifikáló terek

Legyen G rögzített kompakt Lie-csoport.

2.1.1 tétel. *Létezik egy olyan $EG \to BG$ principális G-nyaláb, hogy B parakompakt bázistér esetén minden $P \to B$ principális G-nyaláb $P = f^*EG$ visszahúzottként áll elő. Az EG totális térről az is feltehető, hogy pontrahúzható; ekkor P a fenti $f\colon B \to BG$ leképezést homotópia erejéig meghatározza.* $\square$

Következésképp a B feletti principális G-nyalábok izomorfizmus-osztályai a $[B, BG]$ tér elemeivel azonosíthatók. (Adott X, Y topologikus terekre $[X, Y]$ az X-ből Y-ba menő folytonos leképezések homotópia-osztályainak terét jelöli.) A BG teret a G csoport *klasszifikáló terének*, míg az $EG \to BG$ nyalábot az *univerzális G-nyalábnak* nevezzük. EG pontrahúzhatóságát feltéve belátható, hogy ezek a terek homotópia erejéig meghatározottak. A fenti tétel alapján természetesen minden F fibrumú, G struktúra-csoportú nyaláb előáll mint az $EG \times_\lambda F \to BG$ asszociált nyaláb visszahúzottja. Ilymódon tehát a B tér feletti G-nyalábok megismeréséhez a BG (homotópia erejéig meghatározott) teret és a $[B, BG]$ halmazt kell feltérképeznünk. A továbbiakban a $G = O(n), SO(n)$ illetve $U(n)$ esetekre fogunk szorítkozni.

2.1.2 megjegyzés. G kompaktságára tett feltételünk nem túl erős, hiszen minden véges dimenziós Lie-csoport tartalmaz egy $H \leq G$, vele homotopikusan ekvivalens kompakt csoportot, így minden G struktúra-csoportú nyaláb csoportja H-ra redukálható.

2.2 Vektornyalábok klasszifikáló terei

Jelölje $Gr(n, \mathbb{R}^m)$ az $\mathbb{R}^m$ vektortér n-dimenziós altereinek topologikus terét. (A topológiát $Gr(n\mathbb{R}^m)$-en úgy lehet például megadni, hogy azonosítjuk a $\{f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \mid \dim \mathrm{Im} f = n\}/\cong$ faktorral, ahol $f_1 \cong f_2$ pontosan akkor ha Im f_1=Im f_2.) Az $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ egy $Gr(n, \mathbb{R}^m) \to Gr(n, \mathbb{R}^{m+1})$ leképezést indukál; $m \to \infty$ direkt limesszel így egy $Gr_{\mathbb{R}}(n)$ topologikus tér, az n-dimenziós alterek *Grassmann-sokasága* adódik.

2.2.1 megjegyzés. (a) A $Gr(n, \mathbb{R}^m)$ tér valójában egy sima, kompakt sokaság lesz; $Gr_{\mathbb{R}}(n)$ azonban már nem lesz véges dimenziós.

(b) Legyen $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R}$ és $x_i = 0$ véges sok kivétellel$\}$. Ekkor $Gr_{\mathbb{R}}(n) = Gr(n, \mathbb{R}^\infty)$.

(c) Hasonló konstrukció adja a $Gr_{\mathbb{C}}(n)$ komplex Grassmann-sokaságot is.

(d) Vegyük észre, hogy $Gr(1, \mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{RP}^n$ és $Gr(1, \mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{CP}^n$; jelölje így $\mathbb{RP}^\infty$ és $\mathbb{CP}^\infty$ a $Gr_{\mathbb{R}}(1)$ és $Gr_{\mathbb{C}}(1)$ tereket.

A tautologikus nyalábok definíciójához hasonlóan adhatunk meg n-dimenziós $\tau_{\mathbb{R}}(n)$ (ill. $\tau_{\mathbb{C}}(n)$) nyalábokat a $Gr_{\mathbb{R}}(n)$ (ill. $Gr_{\mathbb{C}}(n)$) terek felett.

2.2.2 tétel. *A $G = O(n)$ választással BG homotóp ekvivalens a $Gr_{\mathbb{R}}(n)$ térrel. Hasonlóan, $BU(n)$ homotóp ekvivalens $Gr_{\mathbb{C}}(n)$-nel.*

Bizonyítás. A következőkben pusztán a valós eset tárgyalására szorítkozunk, a komplex változat tárgyalása hasonlóan megy. Azt kell tehát belátnunk, hogy ha $E \to B$ egy n-dimenziós vektornyaláb, akkor létezik egy olyan $f \colon B \to Gr_{\mathbb{R}}(n)$ folytonos leképezés, melyre $f^*\tau_{\mathbb{R}}(n) = E$, majd meg kell mutatni, hogy f homotópia erejéig egyértelmű.

Először is vegyük észre, hogy egy fenti tulajdonságú f megadása egy olyan $\hat{f} \colon E \to \mathbb{R}^\infty$ függvény megadásával ekvivalens, mely E fibrumai mentén lineáris és injektív. (Ebből már az $f_1(e) = (\hat{f}(e\text{-n áthaladó fibrum}), \hat{f}(e)) \in \tau_{\mathbb{R}}(n)$ megadja a keresett $f_1 \colon E \to \tau_{\mathbb{R}}(n)$ nyaláb-leképezést.)

2.2.3 lemma. *A parakompakt B bázistérnek létezik egy olyan $\{U_i\}_1^\infty$ megszmlálható nyílt fedése, hogy $E|U_i$ triviális.*

Legyen tehát $\{U_i\}_1^\infty$ a B tér fenti tulajdonságú fedése, és legyen $V_i \subset U_i$ olyan nyílt halmaz, melyre $\cup_1^\infty = B$ és $\overline{V}_i \subset U_i$. Hasonlóan rögzítsünk $W_i \subset V_i$ részhalmazokat. $\square$

3. fejezet

Egy kis differenciálgeometria

3.1 A konnexió definíciója

Ebben a fejezetben röviden felidézzük a differenciálgeometria néhány olyan alapfogalmát, melyeket a későbbiekben használni fogunk.

Legyen $P \to M$ adott principális G-nyaláb (a továbbiakban mindig feltesszük, hogy G=SU(2) vagy SO(3)), $E \to M$ pedig a hozzá asszociált vektornyaláb. A következőkben a konnexió fogalmának két egymással ekvivalens definícióját fogjuk megadni. Jelölje $\Omega^i(M;E)$ a $\Gamma(M;\Lambda^i M \otimes E)$ nyaláb-értékű i-formák terét. (Egy $\pi\colon E \to M$ nyalábra $\Gamma(M;E)$ a továbbiakban az $\{s\colon M \to E \mid s \text{ egy } C^\infty\text{-leképezés, és } \pi \circ s = \mathrm{id}_M\}$ szelések terét jelöli.)

3.1.1 definíció. Egy $\nabla\colon \Omega^0(M;E) \to \Omega^1(M;E)$ lineáris operátort *konnexiónak* nevezünk, ha $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$\nabla(f \cdot s) = df \cdot s + f \cdot \nabla(s) \quad (s \in \Omega^0(M;E)).$$

∇-t szokás *kovariáns deriválásnak* is nevezni. Sok esetben hasznosabb a konnexiókat más szemszögből, sokkal inkább geometriai objektumokként kezelni. Ehhez azonban némi előkészítésre van szükségünk.

Mivel $\pi\colon P \to M$ principális G-nyaláb, (definícó szerint) G szabadon hat (jobbról) P-n és $P/G \cong M$. Ez a G-hatás egy ϕ_p izomorfizmust definiál $Ker\ d\pi_p \leq T_pP$ (a fibrum érintőtere avagy függőleges vektorok) és a $Lie(G)$ Lie-algebra között: egy $\eta \in Lie(G)$ elemet $\{g_t\}$ 1-paraméteres részcsoporttal reprezentálva $\phi_p(\frac{d}{dt}(p \cdot g_t)|_{t=0}) = \eta$ egy

$$\phi_p\colon Ker\ d\pi_p \to Lie(G)$$

izomorfizmust ad meg. Idézzük emlékezetünkbe, hogy G hat

- P-n (jobbról),
- TP-n ($g \in G$-re $dg = g^*\colon TP \to TP$),
- $Lie(G)$-n pedig az adjungált hatással (egy $\{g_t\}$ 1-paraméteres részcsoport képe $\{g^{-1}g_tg\}$ 1-paraméteres részcsoport lesz).

3.1.2 definíció. Egy ω P-n definiált $Lie(G)$-értékű 1-forma (tehát $\Omega^1(P;Lie(G))$ egy eleme) konnexió, ha: (I) $\omega|_{Ker\ d\pi_p} = \phi_p$, és (II) $g \in G$ esetén $\omega_{pg}(g^*v) = g^{-1}\omega_p(v)g \in Lie(G)$.

Először is kapcsolatot szeretnénk találni a két definíció között. Belátjuk, hogy ∇ vagy ω megadása ekvivalens egy olyan szabály rögzítésével, mely lehetővé teszi M feletti vektorok (M-beli) görbe menti párhuzamos eltolását. Ezáltal — a párhuzamos eltolás közbeiktatásával — ∇ egyértelműen meghatároz egy $\omega \in \Omega^1(P;Lie(G))$ 1-formát és fordítva.

Egy ∇ kovariáns deriválást rögzítve a következő módon definiálhatjuk az $s_0 \in E_{m_0}$ vektor $\gamma\colon [0,1] \to M$ $(\gamma(0) = m_0)$ görbe menti eltoltját: Először is $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E) \otimes \Gamma(T^*M)$ helyett ∇-t tekinthetjük egy

$\Gamma(E)\otimes\Gamma(TM)\to\Gamma(E)$ operátornak. Kiterjesztve a $\dot\gamma$ γ-menti vektormezőt egy $X\in\Gamma(TM)$ elemmé, keressük meg azt az $s\in\Gamma(E)$ szelést, melyre $\nabla(s,X)=0$ és $s(m_0)=s_0$. Az $s(\gamma(1))\in E_{\gamma(1)}$ elemet fogjuk az $s_0\in E_{\gamma(0)}$ vektor γ menti párhuzamos eltoltjának nevezni. Természetesen, ha adott egy párhuzamos eltolási szabály, vagyis minden görbére rögzítve van egy $E_{\gamma(0)}\to E_{\gamma(1)}$ izomorfizmus, ∇-t könnyen definiálhatjuk: $s\in\Gamma(E)$ és $X\in\Gamma(TM)$ esetén az $m\in M$ pontban $X(m)$-et reprezentáljuk egy $\gamma\colon(-\epsilon,\epsilon)\to M$ $\gamma(0)=m$, $\dot\gamma(0)=X(m)$ görbével, majd az $s(\gamma(t))\in E_{\gamma(t)}$ vektorokat toljuk párhuzamosan az $E_{\gamma(0)}$ fibrumba. Ezáltal $E_{\gamma(0)}$-ban kapunk egy $\bar{s}_t$ görbét, ennek $t=0$-ban vett deriváltját fogjuk a $\nabla(s,X)$ szelés $m\in M$ pontbeli értékeként definiálni. A fenti gondolatmenet tehát azt mutatja, hogy egy kovariáns deriválás egyértelműen meghatároz egy párhuzamos eltolási szabályt és fordítva. Lássuk mi a kapcsolat a konnexió 1-forma (ω), és a párhuzamos eltolás között! Az $\omega\in\Omega^1(P;Lie(G))$ 1-forma egy $\{Ker\ \omega_p\}$ altérmezőt (disztribúciót) definiál P-n, melyről könnyű látni, hogy a $\{Ker\ d\pi_p\}$ függőleges vektorok egy direkt kiegészítője, vagyis $Ker\ \omega_p\oplus Ker\ d\pi_p=T_pP$. Ezért $Ker\ \omega_p$ elemeit az ω konnexió *vízszintes vektorainak* is nevezik. Egy $\gamma\colon[0,1]\to M$ görbe felemeltjének nevezzük azt a $\Gamma\colon[0,1]\to P$ görbét, melyre $\pi\circ\Gamma=\gamma$ (π a $P\to M$ nyaláb projekciója). Könnyű meggondolás mutatja, hogy $\Gamma(0)\in P_{\gamma(0)}$ rögzítésével egyetlen olyan Γ felemelése létezik γ-nak, melyre

$$\dot\Gamma(t)=d\Gamma(t)\in Ker\ \omega,$$

vagyis a felemelt Γ görbe érintői vízszintesek. A $\Gamma(0)\to\Gamma(1)$ függvény egy $P_{\gamma(0)}\to P_{\gamma(1)}$ izomorfizmust ad meg, ami az asszociált vektornyalábon éppen egy párhuzamos eltolási szabályt jelent. Visszafelé egyszerű gondolatmenet mutatja, hogy a párhuzamos eltolási szabály kijelöli a vízszintes vektorokat ($Ker\ \omega$ elemeit), hiszen a párhuzamos eltolási szabály megadja a Γ "vízszintes" felemeléseket, ezek érintőit véve kapjuk $Ker\ \omega$ elemeit. Mivel $Ker\ d\pi$-n egy ω konnexió 1-forma (a 2.1.2 definíció (I) pontja értelmében) rögzített, $Ker\ \omega$ megadásával már az ω 1-forma is definiált. Megmutattuk tehát, hogy a konnexió két definíciója (∇ és ω) ekvivalens. Ezentúl egy konnexiót A-val fogunk jelölni, és mindig az előnyösebb realizációját (kovariáns deriválás vagy 1-forma) fogjuk használni.

A továbbiak előtt néhány jelölést rögzítünk. Jelölje $\mathcal{A}_P$ a $P\to M$ nyalábon lévő konnexiók terét. Mindkét definícióból látszik, hogy $A_1,A_2\in\mathcal{A}_P$ esetén A_1+A_2 nem konnexió. ω_1,ω_2 konnexió 1-formákra azonban $\omega_1-\omega_2$ különbség $Ker\ d\pi$-n eltűnik, így $\omega_1-\omega_2$ egy M-en lévő 1-forma P-re való visszahúzásával egyenlő. A P-hez az adjungált hatással asszociált $Lie(G)$ fibrumú nyalábot adP-vel jelölve a következő állítás teljesül:

3.1.3 állítás. *$\omega_1,\omega_2\in\mathcal{A}_P$-re pontosan egy olyan $\eta\in\Omega^1(M;adP)$ elem létezik, melyre $\omega_1-\omega_2=\pi^*\eta$.* □

Tehát bár $\omega\in\mathcal{A}_P$ értékét a triviális $P\times Lie(G)$ nyalábban veszi fel, η már adP-értékű 1-forma lesz M-en. Vagyis $\mathcal{A}_P$ egy $\Omega^1(M;adP)$-re nézve affin végtelen dimenziós tér. Legyen $\mathcal{G}_P$ az a csoport, melynek elemei olyan $g\colon P\to P$ nyaláb-automorfizmusok, melyek a bázison az identitást indukálják, vagyis $g(P_m)=P_m$ minden $m\in M$-re. A $\mathcal{G}_P$ csoportot szokás *mérce-csoportnak* (gauge group) nevezni.

3.1.4 megjegyzések.

- Rövid megfontolás mutatja, hogy $\mathcal{G}_P$ elemei annak az $AdP\to M$ G-fibrumú nyalábnak a széléseivel azonosíthatók, melyet úgy kapunk, hogy $P\to M$-hez a konjugált hatással G-t asszociáljuk (vagyis $AdP=P\times_G G$, ahol $g\in G$ a $h\in G$ elemen a $h\mapsto g^{-1}hg$ konjugált hatással hat). AdP tehát egy G-fibrumú de nem principális nyaláb! A $P\to M$ nyalábhoz tehát az Ad-hatással G-t asszociálva az $AdP\to M$, az ad-hatással $Lie(G)$-t asszociálva pedig az $adP\to M$ nyalábot kapjuk.

- A fenti definícióból jól látható, hogy $\Omega^0(M;AdP)=\Gamma(M;AdP)$ csoport-struktúrával, $\Omega^0(M;adP)=\Gamma(M;adP)$ pedig Lie-algebra struktúrával rendelkezik, és természetesen a $\mathcal{G}_P=\Omega^0(M;AdP)$ csoport Lie-algebrája éppen $\Omega^0(M;adP)$ lesz.

- Mivel $G=$SO(3) (illetve $G=$SU(2)) esetén a $Lie(G)$ Lie-algebra részalgebrája $\mathbb{R}^3$ (illetve $\mathbb{C}^2$) endomorfizmus-algebrájának, ha $EndE\to M$ jelöli az $E\to M$ nyaláb endomorfizmusainak nyalábját, akkor

$$\Omega^0(M;adP)\le\Omega^0(M;EndE)$$

áll fenn.

Mint láttuk, a $P \to M$ nyalábon lévő A konnexióhoz a P-hez asszociált $E \to M$ vektornyalábon egy ∇_A kovariáns deriválási operátor tartozik. (Itt $E \to M$-et a G csoport természetes — SO(3) esetén a 3-dimenziós valós, SU(2) esetén a 2-dimenziós komplex — reprezentációját használva kapjuk meg $P \to M$-ből.) Természetesen minden asszociált vektornyalábon definiálható az A konnexióhoz tartozó kovariáns deriválási operátor. Ezek közül számunkra a továbbiakban a d_A-val jelzett, $adP \to M$ szelésein ható operátor lesz különösen fontos.

3.1.5 feladat. Lássuk be, hogy a $d_A: \Omega^0(M; adP) \to \Omega^1(M; adP)$ oparátor egy $\omega \in \Omega^0(M; adP)$ elemen a következő módon hat: egy $s \in \Omega^0(M; E) = \Gamma(E)$ szelésre

$$(d_A\omega)(s) = \nabla_A(\omega(s)) - \omega(\nabla_A(s)).$$

(Ne feledjük, hogy az $\omega \in \Omega^0(M; adP) \leq \Omega^0(M; EndE)$ elem hat az $E \to M$ nyalábon, és így az $\Omega^i(M; E)$ tereken is.)

$\mathcal{G}_P$ a visszahúzással természetesen hat az $\mathcal{A}_P$ téren. A $\mathcal{B}_P = \mathcal{A}_P/\mathcal{G}_P$ faktortérnek a későbbiekben nagyon fontos szerep jut majd.

3.2 Görbület

Egy adott ∇ konnexió F_∇ görbületét a következő módon adhatjuk meg. A $\Gamma(M; E \otimes \Lambda^i M) = \Omega^i(M; E)$ teret röviden $\Omega^i(E)$-vel jelölve legyen $\nabla^{(1)}: \Omega^1(E) \to \Omega^2(E)$ az a lineáris operátor, melyre

$$\nabla^{(1)}(s \cdot \omega) = \nabla(s)\omega - s \cdot d\omega \quad (\omega \text{ 1-forma, } s \in \Gamma(E)).$$

Ez a Leibnitz-típusú szabály egyértelműen definiálja $\nabla^{(1)}$-t ∇ ismeretében (hasonló módon tetszőleges i-re kiterjesztve a definíciót $\nabla^{(i)}: \Omega^i(E) \to \Omega^{i+1}(E)$ operátort kaphatunk). Bár ∇ nem $C^\infty(M)$-lineáris — hiszen $\nabla(fs) \neq f \cdot \nabla(s)$ ($f \in C^\infty(M), s \in \Gamma(E)$) —, könnyű számolás mutatja, hogy $\nabla^{(1)} \circ \nabla: \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes \Lambda^2 M)$ már igen. Másszóval a $\nabla^{(1)} \circ \nabla$ operátor $s \in \Gamma(E)$ elemen felvett értéke az $m \in M$ pontban csak az $s(m) \in E_m$ értéktől, nem pedig s-nek az m pont egy környezetén való viselkedésétől függ. Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan $F_\nabla: E \to E \otimes \Lambda^2 M$ nyalábleképezés, melyre

$$\nabla^{(1)} \circ \nabla(s)(m) = F_\nabla(s(m));$$

ezt a leképezést *görbületnek* nevezzük. F_∇ tehát a $Hom(E, E \otimes \Lambda^2 M)$ nyaláb egy szelése. $Hom(E, E \otimes \Lambda^2 M)$ természetesen izomorf az $E \otimes \Lambda^2 M \otimes E^*$ nyalábbal, és könnyen belátható, hogy $adP \cong E \otimes E^*$. Végeredményben tehát a ∇ konnexió F_∇ görbülete $\Gamma(adP \otimes \Lambda^2 M) = \Omega^2(M; adP)$ egy eleme.

Mivel a konnexiónak is két (egymással ekvivalens) definícióját adtuk, a teljesség kedvéért megadjuk az F görbületet arra az esetre is, amikor a konnexiót egy $\omega \in \Omega^1(P; Lie(G))$ 1-forma reprezentálja.

Tekintsük az $\bar{F}_\omega = d\omega + \omega \wedge \omega \in \Omega^2(P; Lie(G))$ Lie-algebra értékű 2-formát. $\omega \wedge \omega$ egy kis magyarázatot igényel: $\omega(\tau)$ Lie-algebra elemet reprezentálhatjuk egy mátrixszal, melyben a mátrix-elemek számértékű 1-formák ($\tau \in T_pP$ egy $p \in P$ pontban). $\omega(\tau_1) \wedge \omega(\tau_2)$ legyen a két mátrix kommutátora úgy, hogy az 1-formákat az ék-szorzással ($\wedge$) szorozzuk össze.

3.2.1 állítás. *Az $\bar{F}_\omega$ 2-forma megszorítása a $\pi: P \to M$ fibrálás fibrumainak érintőterére azonosan nulla, sőt $p \in P$ és $\tau_1, \tau_2 \in T_pP$ esetén ha legalább az egyik τ_i érinti a fibrumot ($\tau_i \in Ker\ d\pi_p$), akkor $\bar{F}_\omega(\tau_1, \tau_2) = 0$.* □

Ez másszóval azt jelenti, hogy létezik egy olyan $F_\omega \in \Omega^2(M; adP)$ 2-forma, melyre $\pi^* F_\omega = \bar{F}_\omega$. Az így kapott F_ω lesz a görbületi kettő-forma, mely megegyezik az előző definíció $F_\nabla \in \Omega^2(M; adP)$ szelésével.

3.2.2 megjegyzések.

- Vegyük észre, hogy bár $\bar{F}_\omega \in \Omega^2(P; Lie(G))$ a triviális $P \times Lie(G)$ nyalábban veszi fel értékeit, F_ω már — a nem feltétlenül triviális — adP nyalábba mutat.
- Jelölje ∇_g az (M, g) Riemann-sokaság Levi-Civita konnexióját. Ekkor pontosan $F_\nabla(m) = 0$ esetén található $m \in M$ körül olyan lokális $\{x_1, ..., x_n\}$ koordináta-rendszer, melyre $g = \sum dx_i^2$, vagyis m körül M olyan, mint $\mathbb{R}^n$ a kanonikus metrikával. Ez az észrevétel indokolja a görbület fenti definícióját.

3.2.3 definíció. Egy A konnexiót *laposnak* (flat) nevezünk, ha $F_A=0$.

Megmutatjuk, hogy rögzített sokaság feletti nyalábon megadható lapos konnexiók a sokaság fundamentális csoportjának reprezentációival azonosíthatók. E kapcsolat megadása előtt azonban szükségünk van a következő definícióra.

3.2.4 definíció. Egy A konnexióra a $\gamma\colon[0,1]\to M$, $\gamma(0)=\gamma(1)=m_0$ hurok menti párhuzamos eltolással kapott $g\colon E_{m_0}\to E_{m_0}$ lineáris transzformációt, vagyis $Hol_\gamma(A)\in Aut(E_{m_0})$ elemet az A konnexió γ menti *holonómiájának* nevezzük. Bár $Aut(E_{m_0})\cong G$ (G a nyaláb struktúra-csoportja), ez az izomorfizmus csak konjugálás erejéig meghatározott, így $Hol_\gamma(A)$ a G csoportnak egy konjugálás erejéig meghatározott eleme.

Ha az A konnexió görbülete 0, vagyis A lapos, homotóp görbékre A holonómiája azonos lesz, tehát A egy $\bar\phi\colon\pi_1(M,m_0)\to Aut(E_{m_0})$ homomorfizmust definiál, ami egy — konjugálás erejéig egyértelmű — $\phi\colon\pi_1(M)\to G$ reprezentációt ad meg. Jelöljük a továbbiakban $\mathcal{R}_G(M)$-mel a $Hom(\pi_1(M),G)$ teret, $\chi_G(M)$-mel pedig ennek $Hom(\pi_1(M),G)/adG$ faktorát (G konjugálással hat a homomorfizmusok terén, ezt a hatást jelöltük adG-vel). A fentiek szerint a holonómia egy lapos konnexióhoz $\chi_G(M)$ egy elemét rendeli. A $P\to M$ nyalábon lévő lapos konnexiók és a fundamentális csoport reprezentációi közötti kapcsolat megértéséhez a következő konstrukcióval kell megismerkednünk. Adott $\rho\colon\pi_1(M)\to G$ reprezentációhoz egy $R_\rho\to M$ principális G-nyaláb és A lapos konnexió asszociálható a következő módon: legyen $\bar M\to M$ az M univerzális fedése, ami tehát egy principális $\pi_1(M)$-nyaláb. A ρ reprezentáció segítégével ehhez egy $R_\rho\to M$ principális G-nyalábot asszociálhatunk:

$$R_\rho=\bar M\times_{\pi_1(M)}G=\bar M\times G/\cong,$$

ahol $(m\cdot\gamma,g)\cong(m,\rho(\gamma)g)\quad(m\in\bar M,\ g\in G,\ \gamma\in\pi_1(M))$. R_ρ tehát nem más mint az $\bar M$ feletti triviális G-nyaláb faktora a $\gamma(m,g)=(m\gamma,\rho(\gamma^{-1})g)\quad\pi_1(M)$-hatással. Véve $\bar M\times G$-n a triviális konnexiót, a fenti faktorizálás egy A konnexiót definiál $R_\rho\to M$-en. Mivel A lokálisan olyan, mint a triviális konnexió $\bar M$-en, $F_A=0$ teljesül, vagyis A lapos. Azt is könnyű belátni, hogy valójában minden lapos konnexió megkapható evvel a konstrukcióval. Legyen tehát $\chi_G(M,P)=\{\rho\in\mathcal{R}_G(M)\mid R_\rho\cong P\}/adG$, $\mathcal{F}_P=\{A\in\mathcal{A}_P\mid F_A=0\}/\mathcal{G}_P$; ekkor

3.2.5 állítás. *A $H\colon\mathcal{F}_P\to\chi_G(M,P)$ holonómia-függvény bijekciót ad meg a P-n lévő lapos konnexiók és $\pi_1(M)$ azon ρ reprezentációi között, melyekre $R_\rho=P$.* $\square$

Az eddig definiált terek — $\mathcal{A}_P$, $\mathcal{B}_P$, $\mathcal{F}_P$ — nem nyújtanak információt M sima struktúrájára vonatkozóan. $\mathcal{A}_P$ végtelen dimenziós affin tér, $\mathcal{F}_P$ a $\pi_1(M)$ ismeretében meghatározható, és $\mathcal{B}_P$-ről is belátható, hogy M-nek csak a homotópia-típusától függ. Egy új — ezúttal egy Riemann-metrikától függő — operátor bevezetésével a helyzet gyökeresen megváltozik.