Csomó–invariánsok: alacsony dimenziós topológia és kombinatorika

Stipsicz András

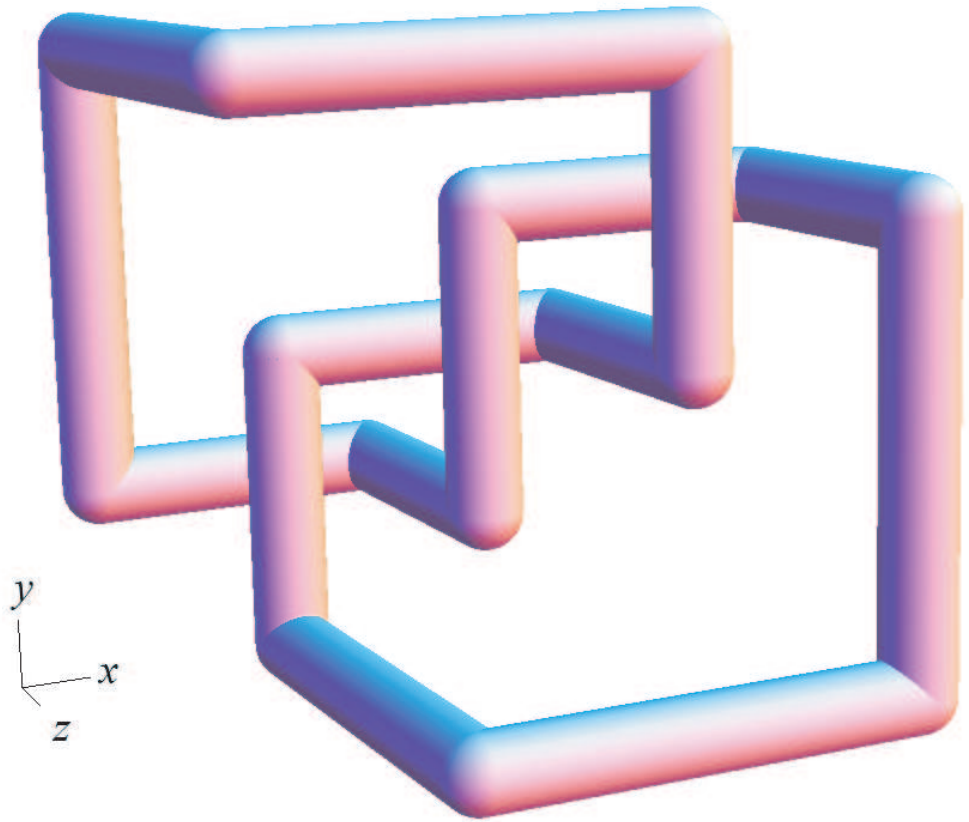
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

2008. november 24.

Definíció

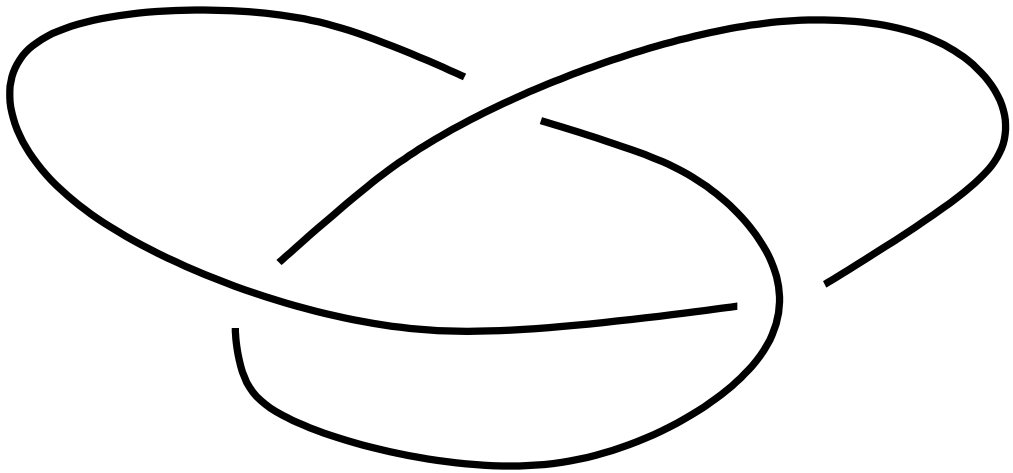
Az S^1 körvonal $\mathbf{R}^3$–ba való differenciálható beágyazásait nevezzük *csomóknak*. A K_1 és K_2 csomók azonosak, ha "egymásba mozgathatók", vagyis létezik csomóknak egy olyan, az $[1, 2]$ intervallummal parameterezett családja, aminek $t = 1$–hez tartozó tagja K_1, míg $t = 2$–höz tartozó tagja K_2.

Egy példa: a háromlevelű csomó



Vetület

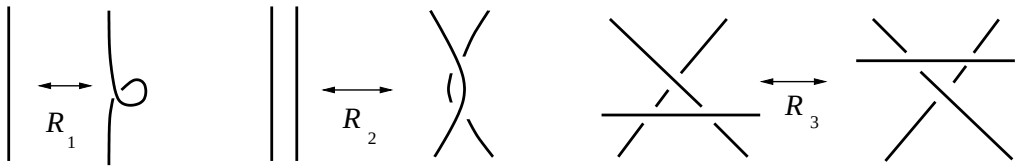
Lerajzolni kényelmesen csomók *síkvetületeit* lehet, ahol megszakítással jelezzük az alul illetve felül haladó szálat. (Mindig létezik olyan vetület, melyben csak duplapontok vannak.)



Reidemeister tétele

Tétel (Reidemeister tétele)

Két vetület pontosan akkor tartozik ugyanahhoz a csomóhoz, ha a projekciók az R_1, R_2 és R_3 mozgások véges sokszori alkalmazásával egymásba vihetők.



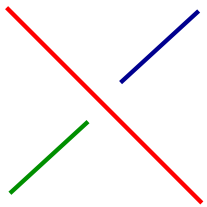
Egy példa: 3–színezhetőség

Csomónvariánsokat tehát például úgy kaphatunk, hogy vetületek olyan invariánsait vizsgáljuk, melyek az R_i mozásokra nem változnak. Egy ilyen példa: csomók 3–színezhetősége.

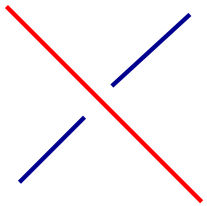
Definíció

Egy vetület 3–színezhető ha a vetületben szereplő ívek kiszínezhetők a P, K és Z színekkel úgy, hogy minden szín szerepeljen, és egy kereszteződésben vagy mindhárom vagy csak az egyik szín szerepeljen.

Helyes



Helyes



Helyetlen

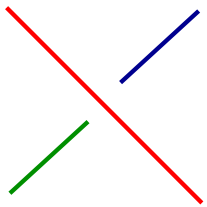
Egy példa: 3–színezhetőség

Csomónvariánsokat tehát például úgy kaphatunk, hogy vetületek olyan invariánsait vizsgáljuk, melyek az R_i mozásokra nem változnak. Egy ilyen példa: csomók 3–színezhetősége.

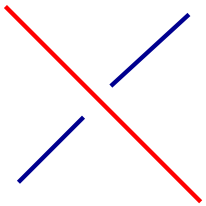
Definíció

Egy vetület 3–színezhető ha a vetületben szereplő ívek kiszínezhetők a P, K és Z színekkel úgy, hogy minden szín szerepeljen, és egy kereszteződésben vagy mindhárom vagy csak az egyik szín szerepeljen.

Helyes



Helyes

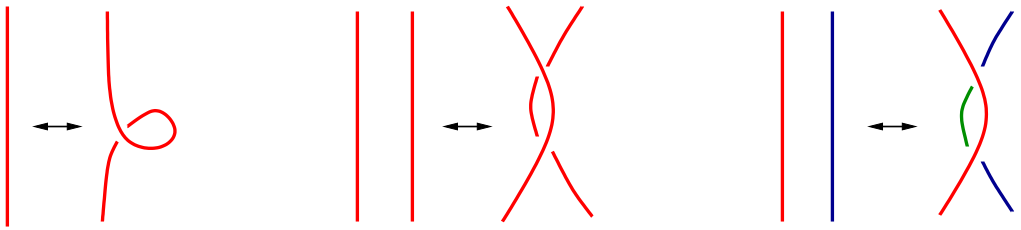


Helyetlen

Egy 3-színezhetőségi tétel

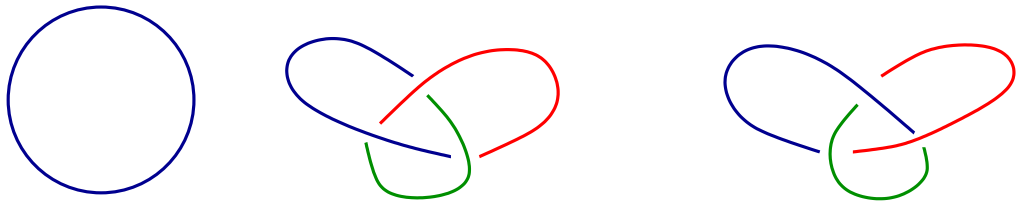
Tétel

A 3–színezhetőség a csomó egy tulajdonsága (tehát független a választott vetülettől).



Következmény

A háromlevelű csomó különbözik a triviális csomótól. (De a tulajdonság nem különbözteti meg pl. a tükörképétől.)



A csomó génusza és fibrálhatósága

Tény (Seifert tétele)

Minden $\mathbf{R}^3$–beli csomó egy (irányítható) felület határa.

Egy felületet pedig a benne lévő 'lyukak' száma (a felület *génusza* vagy *neme*) egyértelműen meghatároz.

A génusz

Definíció

A K csomó génusza a K-t mint peremet tartalmazó felületek génuszainak minimuma,

$$g(K) = \min\{g(F) \mid F \subset \mathbf{R}^3, \quad \partial F = K\}.$$

$g(K)$ a csomó bonyolultságának egy mérőszáma, pl. a triviális csomónak (és csak annak) a génusza 0, a háromlevelűé egy. Ez az érték (elég bonyolult csomót választva) akármilyen nagy lehet.

A génusz

Definíció

A K csomó génusza a K-t mint peremet tartalmazó felületek génuszainak minimuma,

$$g(K) = \min\{g(F) \mid F \subset \mathbf{R}^3, \quad \partial F = K\}.$$

$g(K)$ a csomó bonyolultságának egy mérőszáma, pl. a triviális csomónak (és csak annak) a génusza 0, a háromlevelűé egy. Ez az érték (elég bonyolult csomót választva) akármilyen nagy lehet.

Fibráltság

Definíció

Egy K csomó fibrált ha komplementuma felületek egy családja, vagyis létezik egy

$$\phi\colon S^3 - K \to S^1$$

leképezés, melyre minden $\phi^{-1}(t)$ egy rögzített (nem–kompakt) 2–dimenziós felülettel homeomorf. (Tehát ezek a csomók, vagy legalábbis komplementumaik 'kisebb dimenziós részekből' vannak összerakva.)

Az Alexander polinom

Legyen K egy adott csomó, és vegyük egy V vetületét. Jelölje $Cr(V)$ a vetületben lévő kereszteződések halmazát, míg $D_0(V)$ a tartományokat. Jelöljünk meg egy élet, és legyen $D(V)$ azon tartományok halmaza, melyek a jelölt éltől diszjunktak.

Definíció

Egy

$$\sigma : Cr(V) \to D(V)$$

bijekciót Kauffman állapotnak hívunk, ha minden $c_i \in Cr(V)$ esetén $c_i \in \sigma(c_i)$.

Az Alexander polinom

Legyen K egy adott csomó, és vegyük egy V vetületét. Jelölje $Cr(V)$ a vetületben lévő kereszteződések halmazát, míg $D_0(V)$ a tartományokat. Jelöljünk meg egy élet, és legyen $D(V)$ azon tartományok halmaza, melyek a jelölt éltől diszjunktak.

Definíció

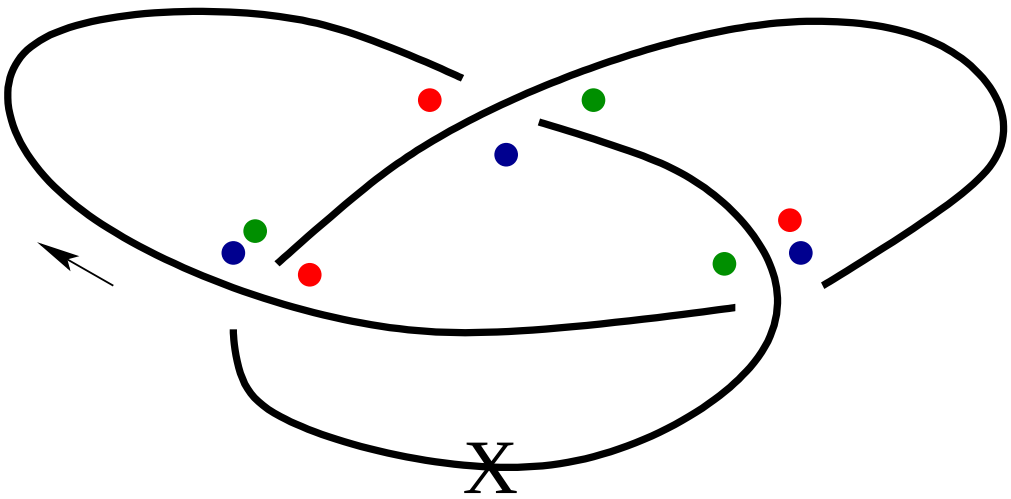
Egy

$$\sigma\colon Cr(V) \to D(V)$$

bijekciót Kauffman állapotnak hívunk, ha minden $c_i \in Cr(V)$ *esetén* $c_i \in \sigma(c_i)$.

Példa

A háromlevelű csomó szokásos vetületének három Kauffman állapota van, melyeket piros, zöld és kék pontok jeleznek:



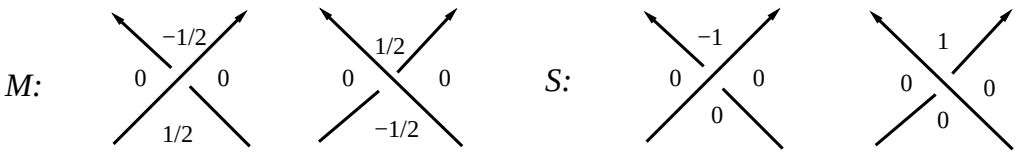
Rögzítsünk a K csomóra egy megjelölt, irányított vetületet, és vegyünk egy σ Kauffman állapotot. Legyen

$$M(\sigma) = \sum_{c_i \in Cr(V)} M(\sigma(c_i))$$

és

$$S(\sigma) = \sum_{c_i \in Cr(V)} S(\sigma(c_i)).$$

ahol



Legyen

$$\Delta_K(t) = \sum_{\sigma \in Kauff(V)} (-1)^{S(\sigma)} t^{M(\sigma)} \in \mathbf{Z}[t^{-\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}].$$

Tétel

A $\Delta_K(t)$ Alexander polinom a csomó egy invariánsa.

(Bizonyítás ötlete: lássuk be hogy az R_1, R_2, R_3 Reidemeister mozgások során a 'polinom' értéke nem változik. Ehhez találjuk meg a a Kauffmann állapotok alkalmas párba állításait.)

Legyen

$$\Delta_K(t) = \sum_{\sigma \in Kauff(V)} (-1)^{S(\sigma)} t^{M(\sigma)} \in \mathbf{Z}[t^{-\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}].$$

Tétel

A $\Delta_K(t)$ Alexander polinom a csomó egy invariánsa.

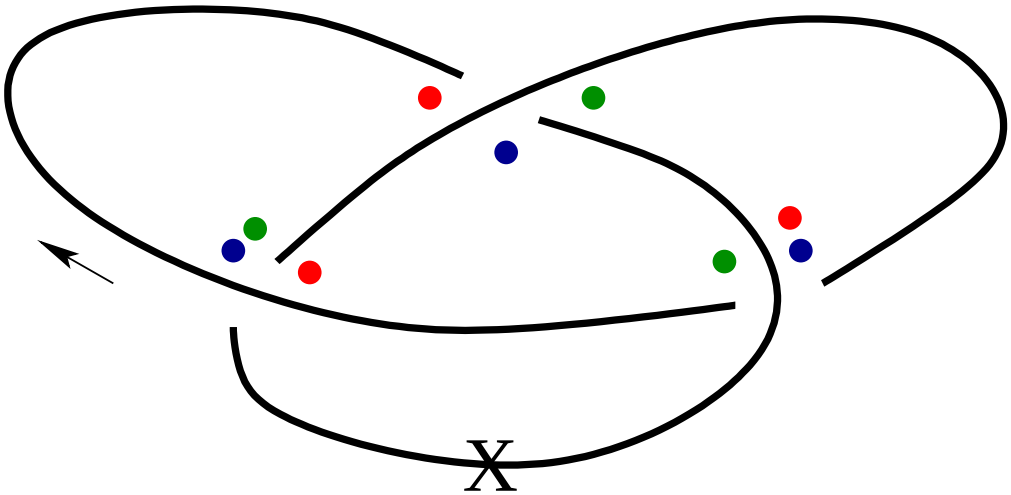
(Bizonyítás ötlete: lássuk be hogy az R_1, R_2, R_3 Reidemeister mozgások során a 'polinom' értéke nem változik. Ehhez találjuk meg a a Kauffmann állapotok alkalmas párba állításait.)

Példa: a háromlevelű csomó

$$S(P) = 0, M(P) = -1; S(Z) = 2, M(Z) = 1; S(K) = 1, M(K) = 0$$

Az Alexander polinom tehát $t - 1 + t^{-1}$.

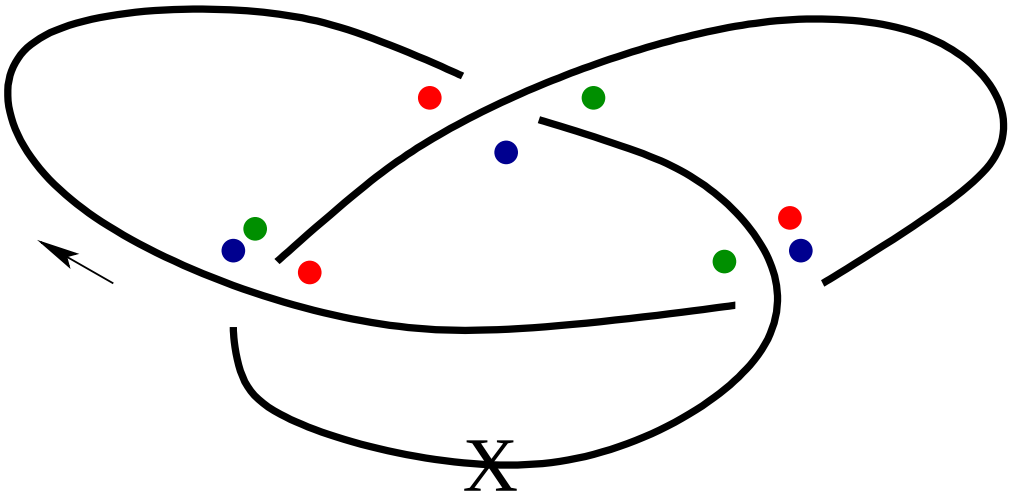
A tükörképre $(S, M) = (0, 1), (-2, -1), (-1, 0)$, így az Alexander polinom ugyanaz lesz a tükörképre. (Ez minden csomóra igaz.)



Példa: a háromlevelű csomó

$$S(P) = 0, M(P) = -1; S(Z) = 2, M(Z) = 1; S(K) = 1, M(K) = 0$$

Az Alexander polinom tehát $t - 1 + t^{-1}$.
A tükörképre $(S, M) = (0, 1), (-2, -1), (-1, 0)$, így az Alexander polinom ugyanaz lesz a tükörképre. (Ez minden csomóra igaz.)



Egy fontos tétel

Tétel

Egy K csomó $\Delta_K(t)$ Alexander polinomjára

- $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$, *és így* $\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(t^i + t^{-i})$ $(a_n \neq 0)$
- $n \leq g(K)$
- *ha K fibrált, akkor* $n = g(K)$ *és* $a_n = \pm 1$.

Egy fontos tétel

Tétel

Egy K csomó $\Delta_K(t)$ Alexander polinomjára

- $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$, *és így* $\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(t^i + t^{-i})$ $(a_n \neq 0)$
- $n \leq g(K)$
- *ha K fibrált, akkor* $n = g(K)$ *és* $a_n = \pm 1$.

Egy fontos tétel

Tétel

Egy K csomó $\Delta_K(t)$ Alexander polinomjára

- $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$, *és így* $\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(t^i + t^{-i})$ $(a_n \neq 0)$
- $n \leq g(K)$
- *ha K fibrált, akkor $n = g(K)$ és $a_n = \pm 1$.*

Egy fontos tétel

Tétel

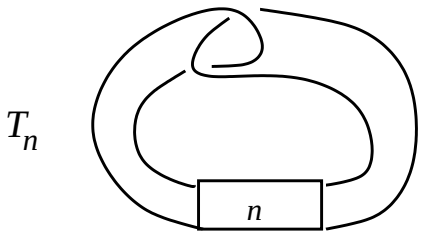
Egy K csomó $\Delta_K(t)$ Alexander polinomjára

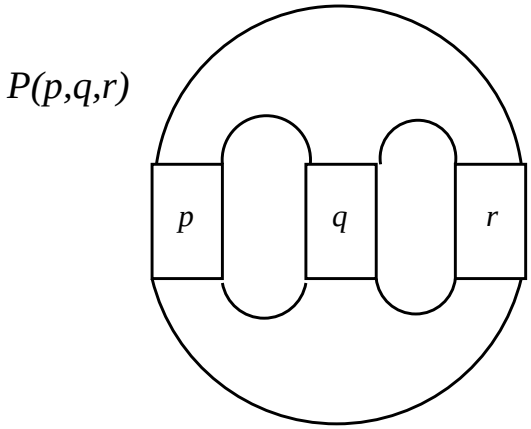
- $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$, *és így* $\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(t^i + t^{-i})$ $(a_n \neq 0)$
- $n \leq g(K)$
- *ha K fibrált, akkor* $n = g(K)$ *és* $a_n = \pm 1$.

Példa nem–fibrált csomóra

n páratlan: $\Delta_{T_n} = \frac{n+1}{2}t - n + \frac{n+1}{2}t^{-1}$. (Tehát nem fibrált.)

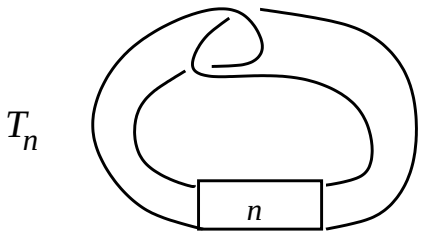
$\Delta_{P(p,q,r)} = Dt - 2D + 1 + Dt^{-1}$, ahol
$D = ab + ac + bc + a + b + c + 1$ és
$p = 2a + 1, q = 2b + 1, r = 2c + 1$.)
Pl. $K = P(-3, 5, 7)$ perec-csomóra $\Delta_K(t) = 1$, de a csomó nem triviális.

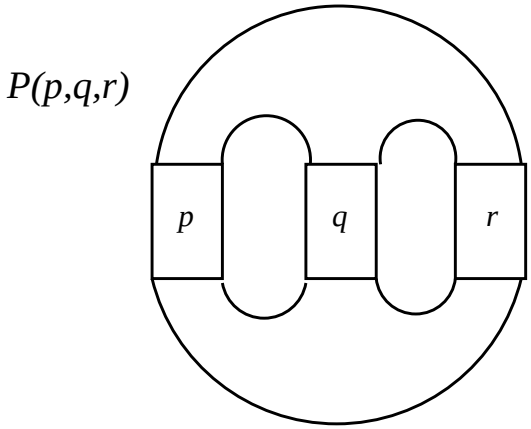




Példa nem–fibrált csomóra

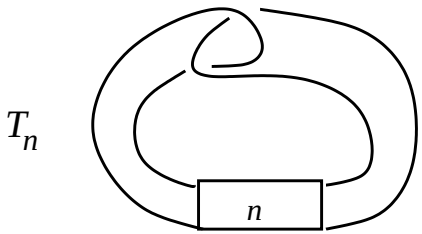
n páratlan: $\Delta_{T_n} = \frac{n+1}{2}t - n + \frac{n+1}{2}t^{-1}$. (Tehát nem fibrált.)
$\Delta_{P(p,q,r)} = Dt - 2D + 1 + Dt^{-1}$, ahol
$D = ab + ac + bc + a + b + c + 1$ és
$p = 2a + 1, q = 2b + 1, r = 2c + 1$.)
Pl. $K = P(-3, 5, 7)$ perec-csomóra $\Delta_K(t) = 1$, de a csomó nem triviális.

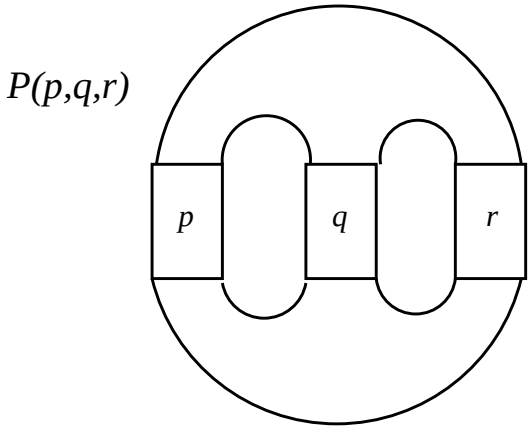




Példa nem–fibrált csomóra

n páratlan: $\Delta_{T_n} = \frac{n+1}{2}t - n + \frac{n+1}{2}t^{-1}$. (Tehát nem fibrált.)
$\Delta_{P(p,q,r)} = Dt - 2D + 1 + Dt^{-1}$, ahol
$D = ab + ac + bc + a + b + c + 1$ és
$p = 2a + 1, q = 2b + 1, r = 2c + 1$.)
Pl. $K = P(-3, 5, 7)$ perec-csomóra $\Delta_K(t) = 1$, de a csomó nem triviális.





Lánckomplexusok

Legyenek C_i $(i = 0, \ldots, n+1)$ vektorterek és $\partial_i : C_i \to C_{i-1}$ lineáris leképezések. (Tegyük fel, hogy $\dim C_0 = \dim C_{n+1} = 0$.)

Definíció

A (C_i, ∂_i) pár egy lánckomplexus, ha $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ (vagyis $\mathrm{im}\partial_{i+1} \leq \ker \partial_i$) minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. A $H_i = \ker \partial_i / \mathrm{im}\partial_{i+1}$ faktort a lánckomplexus i-edik homológia–csoportjának nevezzük.

Egy egyszerű azonosság

Tény

$$\sum_i (-1)^i \dim C_i = \sum_i (-1)^i \dim H_i$$

(A $0 \to C_1 \xrightarrow{f} C_2 \to 0$ lánckomplexusra ez egyszerűen a $\dim H_2 - \dim H_1 = \dim \operatorname{coker} f - \dim \ker f = \dim C_2 - \dim \operatorname{im} f - \dim \ker f = \dim C_2 - \dim C_1$ homomorfizmus–tételre redukálódik.)

Egy egyszerű azonosság

Tény

$$\sum_i (-1)^i \dim C_i = \sum_i (-1)^i \dim H_i$$

(A $0 \to C_1 \xrightarrow{f} C_2 \to 0$ lánckomplexusra ez egyszerűen a $\dim H_2 - \dim H_1 = \dim \operatorname{coker} f - \dim \ker f = \dim C_2 - \dim \operatorname{im} f - \dim \ker f = \dim C_2 - \dim C_1$ homomorfizmus–tételre redukálódik.)

A generátorok

Legyen $C_d(K,s)$ az olyan σ Kauffman állapotok által generált $\mathbf{Z}_2$–vektortér, melyekre $M(\sigma)=d$ és $S(\sigma)=s$.
Minden rögzített s-re definiálni fogunk egy $(C_d(K,s),\partial_d(K,s))_d$ lánckomplexust.

Tény

Mivel $\sum(-1)^d \dim C_d(K,s)=a_s$ (az Alexander polinom s–edik együtthatója), így tetszőleges leképezést választva igaz lesz az, hogy

$$\sum_d (-1)^d \dim H_d(K,s)=a_s.$$

Természetesen a homológia–csoportok csak ügyesen választott $\partial_{s,d}$–k esetén lesznek a csomó (és nem a vetület) invariánsai.

A generátorok

Legyen $C_d(K,s)$ az olyan σ Kauffman állapotok által generált $\mathbf{Z}_2$–vektortér, melyekre $M(\sigma)=d$ és $S(\sigma)=s$.
Minden rögzített s-re definiálni fogunk egy $(C_d(K,s),\partial_d(K,s))_d$ lánckomplexust.

Tény

Mivel $\sum(-1)^d \dim C_d(K,s)=a_s$ *(az Alexander polinom* s*–edik együtthatója), így tetszőleges leképezést választva igaz lesz az, hogy*

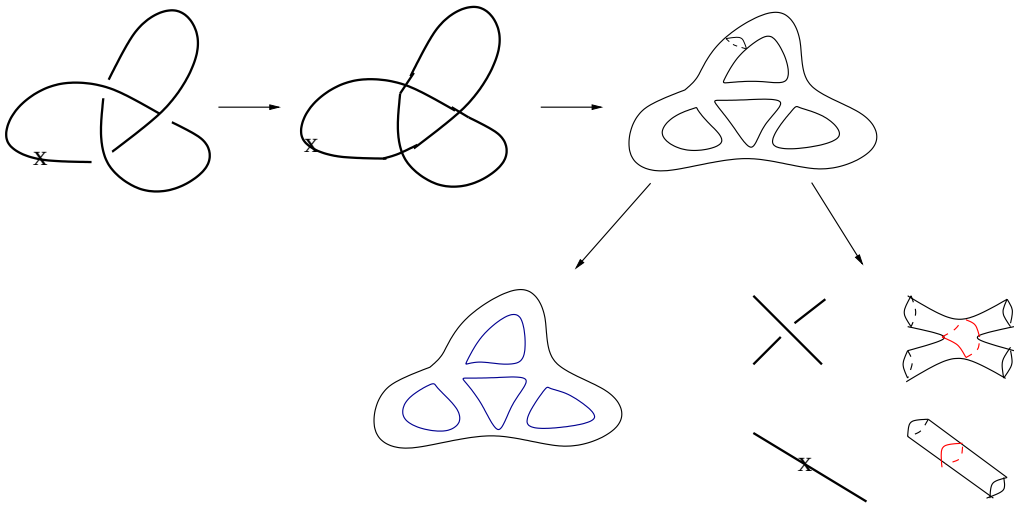
$$\sum_d(-1)^d \dim H_d(K,s)=a_s.$$

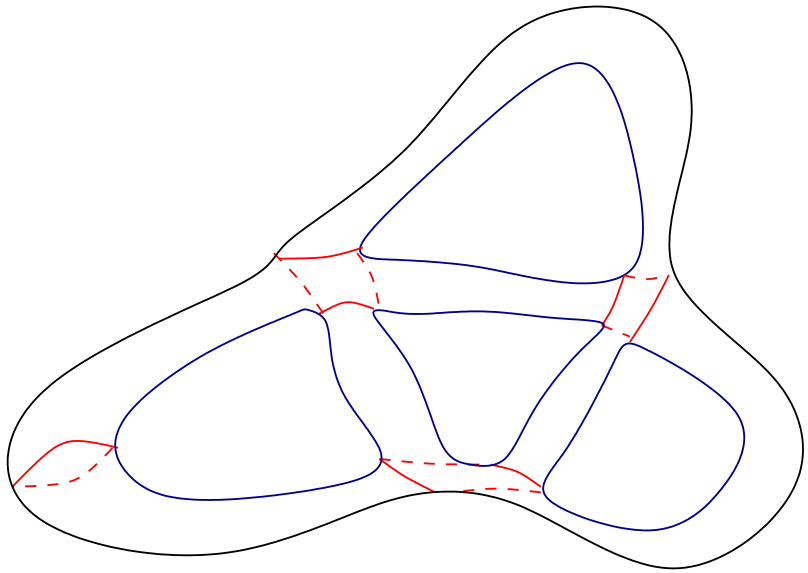
Természetesen a homológia–csoportok csak ügyesen választott $\partial_{s,d}$*–k esetén lesznek a csomó (és nem a vetület) invariánsai.*

Ehhez szükségünk van a Kauffman állapot egy másik leírására.

Legyen Σ a vetület egy kis környezetének határa. (Pl. a háromlevelű csomó szokásos vetületére ez egy 4–génuszú felület.) Nevezzük a 'belső tartományok' (felületen lévő) kontúrjait α–görbéknek. Ha a vetületben k duplapont van, akkor $k+1$ ilyen görbét kapunk. A kereszteződésekhez pedig rendeljünk egy β–görbét a rajz szerint; a megjelölt él mellett pedig adjunk még egy β–görbét.

Ehhez szükségünk van a Kauffman állapot egy másik leírására. Legyen Σ a vetület egy kis környezetének határa. (Pl. a háromlevelű csomó szokásos vetületére ez egy 4–génuszú felület.) Nevezzük a 'belső tartományok' (felületen lévő) kontúrjait α–görbéknek. Ha a vetületben k duplapont van, akkor $k+1$ ilyen görbét kapunk. A kereszteződésekhez pedig rendeljünk egy β–görbét a rajz szerint; a megjelölt él mellett pedig adjunk még egy β–görbét.





Nyilván $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n \subset \Sigma \times \ldots \times \Sigma = \Sigma^n$, és hasonlóan a β–görbékre. A sorrend választáson alapul, vegyük ezért inkább a $Sym^n(\Sigma)$ 'szimmetrikus szorzatot', ahol a rendezetlen n-esek halmazát tekintjük.
Eredmény: $\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \subset Sym^n(\Sigma)$ n–dimenziós tóruszok (a körvonal n–edik hatványai) a $Sym^n(\Sigma)$ $2n$–dimenziós térben.

Tény

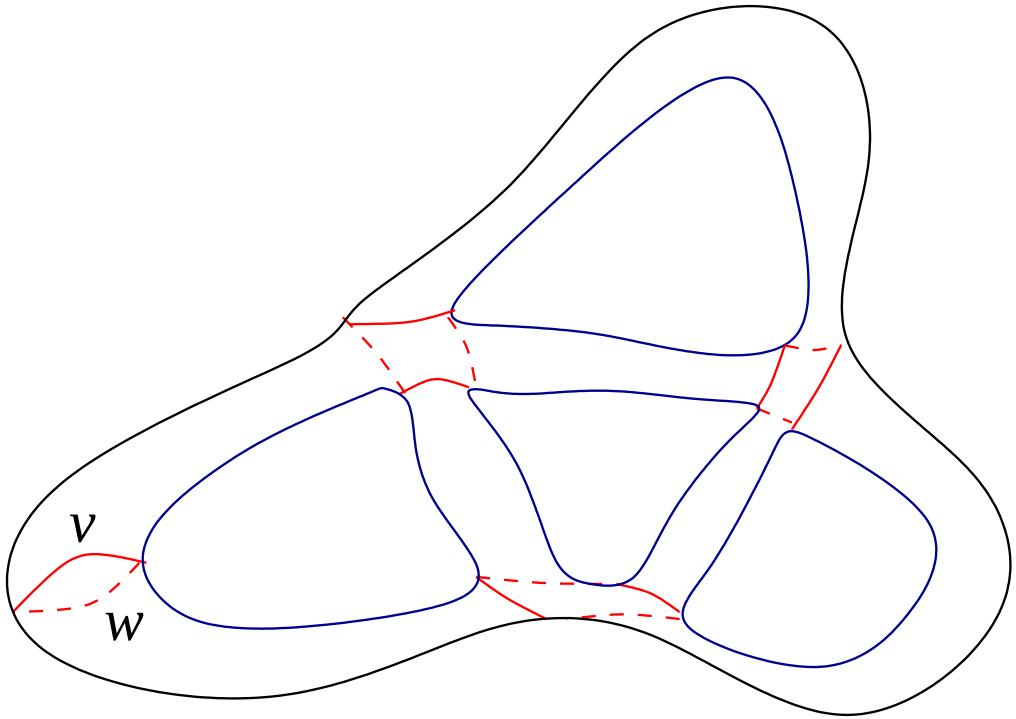
A vetület Kauffman állapotai 1-1 értelmű megfeletetésben állnak a $\mathbf{T}_\alpha \cap \mathbf{T}_\beta$ *metszéspontokkal.*

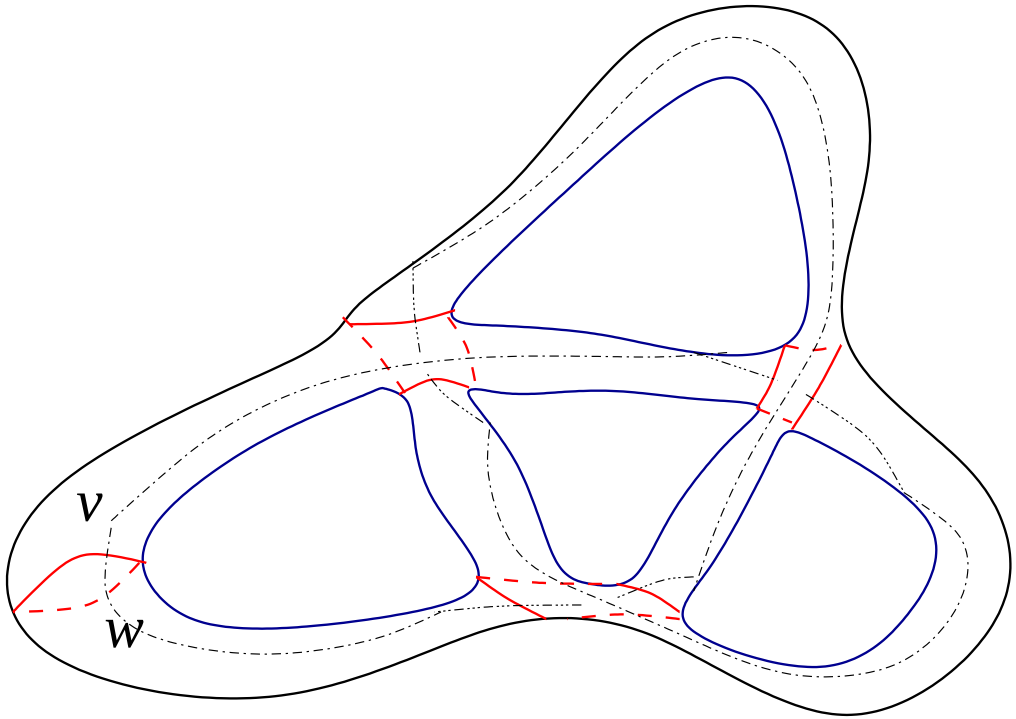
Ötlet: $\mathbf{T}_\alpha \cap \mathbf{T}_\beta$ egy eleme egy olyan $\{x_1, \ldots, x_n\}$ pont–n–es, melyre $x_i \in \alpha_i \cap \beta_{\pi(i)}$ valamely π permutációra. A jel melletti β–görbén nincs választásunk, a többin meg az a tény, hogy melyik α–görbével vett metszetet jelöljük ki, meghatároz egy tartományt, és így egy Kauffman állapotot.

Rögzítsünk még a jel melletti β–görbe két oldalán egy–egy pontot (amit w és v fog jelölni).

Tény

Ha w–ből v-be megyünk az α görbék Σ–beli komplementumában (egyszerűen átmegyünk az őket elválasztó β-n), majd v–ből w–be megyünk a β–görbék komplementumában, akkor visszakapjuk a K csomót (így választottuk meg a β–görbéinket).


v
w


v
w

A differenciál

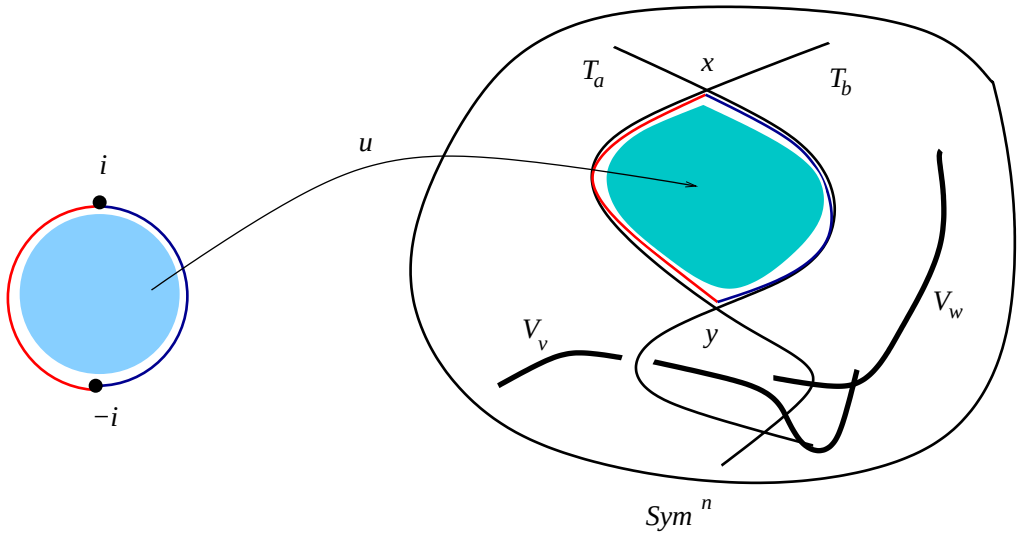
Emlékezzünk, hogy egy $\partial_d = \partial_d(K, s)\colon C_d(K, s) \to C_{d-1}(K, s)$ lineáris leképezést keresünk, ahol $C_d(K, s)$ vektorteret a megfelelő Kauffman állapotok generálnak.
Legyen tehát $x \in C_d(K, s)$ és $y \in C_{d-1}(K, s)$ egy–egy generátor; az

$$n_{xy} = \langle \partial_d x, y \rangle$$

mátrix–elemet akarjuk teát definiálni. Tekintsük x, y–t a $\mathbf{T}_\alpha \cap \mathbf{T}_\beta$ metszet egy–egy elemének. Legyen $S = \{z \in \mathbf{C} \mid z\overline{z} \leq 1\}$ egységnyi körlap.

Legyen n_{xy} azon holomorf (komplex differenciálható) $u\colon S \to Sym^n(\Sigma)$ leképezések (modulo 2) száma, melyekre

- $u(\{z \mid z\overline{z} = 1, \mathrm{Re}(z) < 0\}) \subset \mathbf{T}_\beta$
- $u(\{z \mid z\overline{z} = 1, \mathrm{Re}(z) > 0\}) \subset \mathbf{T}_\alpha$
- $u(i) = x$
- $u(-i) = y$
- Ha $V_v = \{v\} \times Sym^{n-1}(\Sigma)$, akkor $u(S) \cap V_v = \emptyset$
- Ha $V_w = \{w\} \times Sym^{n-1}(\Sigma)$, akkor $u(S) \cap V_w = \emptyset$


T_a
x
T_b
u
i
V_w
V_v
y
$-i$
Sym^n

Néhány fontos tétel

A kapott homológiák: a csomó Floer homológiái.

Tétel (Ozsáth–Szabó 2003-2005, Yi Ni, Juhász)

- *Az így definiált lánckomplexus $H_d(K,s)$ homológia–csoportja a csomó egy invariánsa (tehát a választott vetülettől független).*
- *$\sum_d (-1)^d \dim H_d(K,s) = a_s$, valamint $H_d(K,s)$ és $H_{d-2s}(K,-s)$ izomorf.*
- $$g(K) = \max\{s \mid H_d(K,s) \neq 0 \quad \text{valamely} \quad d\text{–re}\}$$
- *A csomó pontosan akkor fibrált ha $\sum_d H_d(K,g(K)) = \mathbf{Z}_2$, vagyis egy d–re $\mathbf{Z}_2$, a többire eltűnik.*

Probléma: Kiszámíthatóság.

Néhány fontos tétel

A kapott homológiák: a csomó Floer homológiái.

Tétel (Ozsáth–Szabó 2003-2005, Yi Ni, Juhász)

- *Az így definiált lánckomplexus $H_d(K,s)$ homológia–csoportja a csomó egy invariánsa (tehát a választott vetülettől független).*
- $\sum_d (-1)^d \dim H_d(K,s) = a_s$, *valamint* $H_d(K,s)$ *és* $H_{d-2s}(K,-s)$ *izomorf.*
- $$g(K) = \max\{s \mid H_d(K,s) \neq 0 \quad \text{valamely} \quad d\text{–re}\}$$
- *A csomó pontosan akkor fibrált ha* $\sum_d H_d(K, g(K)) = \mathbf{Z}_2$, *vagyis egy* d*–re* $\mathbf{Z}_2$, *a többire eltűnik.*

Probléma: Kiszámíthatóság.

Néhány fontos tétel

A kapott homológiák: a csomó Floer homológiái.

Tétel (Ozsáth–Szabó 2003-2005, Yi Ni, Juhász)

- *Az így definiált lánckomplexus $H_d(K,s)$ homológia–csoportja a csomó egy invariánsa (tehát a választott vetülettől független).*
- $\sum_d (-1)^d \dim H_d(K,s) = a_s$, *valamint* $H_d(K,s)$ *és* $H_{d-2s}(K,-s)$ *izomorf.*
- $$g(K) = \max\{s \mid H_d(K,s) \neq 0 \quad \text{valamely} \quad d\text{–re}\}$$
- *A csomó pontosan akkor fibrált ha* $\sum_d H_d(K, g(K)) = \mathbf{Z}_2$, *vagyis egy d–re* $\mathbf{Z}_2$, *a többire eltűnik.*

Probléma: Kiszámíthatóság.

Néhány fontos tétel

A kapott homológiák: a csomó Floer homológiái.

Tétel (Ozsáth–Szabó 2003-2005, Yi Ni, Juhász)

- *Az így definiált lánckomplexus $H_d(K,s)$ homológia–csoportja a csomó egy invariánsa (tehát a választott vetülettől független).*
- $\sum_d (-1)^d \dim H_d(K,s) = a_s$, *valamint* $H_d(K,s)$ *és* $H_{d-2s}(K,-s)$ *izomorf.*
- $$g(K) = \max\{s \mid H_d(K,s) \neq 0 \quad \text{valamely} \quad d\text{–re}\}$$
- *A csomó pontosan akkor fibrált ha* $\sum_d H_d(K, g(K)) = \mathbf{Z}_2$, *vagyis egy* d*–re* $\mathbf{Z}_2$, *a többire eltűnik.*

Probléma: Kiszámíthatóság.

Néhány fontos tétel

A kapott homológiák: a csomó Floer homológiái.

Tétel (Ozsáth–Szabó 2003-2005, Yi Ni, Juhász)

- *Az így definiált lánckomplexus $H_d(K,s)$ homológia–csoportja a csomó egy invariánsa (tehát a választott vetülettől független).*
- $\sum_d (-1)^d \dim H_d(K,s) = a_s$, *valamint* $H_d(K,s)$ *és* $H_{d-2s}(K,-s)$ *izomorf.*
- $$g(K) = \max\{s \mid H_d(K,s) \neq 0 \quad \text{valamely} \quad d\text{–re}\}$$
- *A csomó pontosan akkor fibrált ha* $\sum_d H_d(K, g(K)) = \mathbf{Z}_2$, *vagyis egy d–re* $\mathbf{Z}_2$, *a többire eltűnik.*

Probléma: Kiszámíthatóság.

Néhány fontos tétel

A kapott homológiák: a csomó Floer homológiái.

Tétel (Ozsáth–Szabó 2003-2005, Yi Ni, Juhász)

- *Az így definiált lánckomplexus $H_d(K,s)$ homológia–csoportja a csomó egy invariánsa (tehát a választott vetülettől független).*
- $\sum_d (-1)^d \dim H_d(K,s) = a_s$, *valamint* $H_d(K,s)$ *és* $H_{d-2s}(K,-s)$ *izomorf.*
- $$g(K) = \max\{s \mid H_d(K,s) \neq 0 \quad \text{valamely} \quad d\text{–re}\}$$
- *A csomó pontosan akkor fibrált ha* $\sum_d H_d(K, g(K)) = \mathbf{Z}_2$, *vagyis egy d–re* $\mathbf{Z}_2$, *a többire eltűnik.*

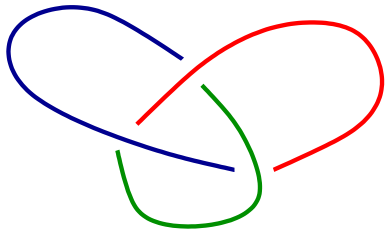
Probléma: Kiszámíthatóság.

Egy példa

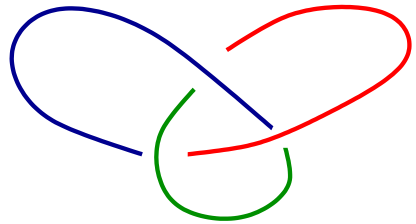
A két háromlevelű csomóra (pusztán a Kauffman állapotok alapján, hiszen itt a differenciál eltűnik, mert rögzített s–re csak egy d–ben nem nulla $C_d(K,s)$):

$$H_0(B,-1) = H_1(B,0) = H_2(B,1) = \mathbf{Z}_2$$

$$H_{-2}(J,-1) = H_{-1}(J,0) = H_0(J,1) = \mathbf{Z}_2$$



B



J

Eredmények

A fenti tételek bizonyítása: komoly holomorf (illetve majdnem–holomorf) geometria. Ezeket a módszereket Gromov (1985) és Floer (1988) kezdeményezte/alkalmazta először.

Tétel (Manolescu-Ozsváth-Sarkar, illetve Ozsváth-Stipsicz-Szabó és Ozsváth-Szabó)

A $H_d(K,s)$ csoportok kombinatorikus módszerekkel kiszámíthatók.

Ozsváth-Stipsicz-Szabó és Ozsváth-Szabó: az elmélet kiterjeszthető ún. szinguláris csomókra (ahol a K csomó $\mathbf{R}^3$–ban metszi magát), és ebből kombinatorikus számítási mód adódik.
Manolescu-Ozsváth-Sarkar: rácsdiagramok.

Eredmények

A fenti tételek bizonyítása: komoly holomorf (illetve majdnem–holomorf) geometria. Ezeket a módszereket Gromov (1985) és Floer (1988) kezdeményezte/alkalmazta először.

Tétel (Manolescu-Ozsváth-Sarkar, illetve Ozsváth-Stipsicz-Szabó és Ozsváth-Szabó)

A $H_d(K,s)$ csoportok kombinatorikus módszerekkel kiszámíthatók.

Ozsváth-Stipsicz-Szabó és Ozsváth-Szabó: az elmélet kiterjeszthető ún. szinguláris csomókra (ahol a K csomó $\mathbf{R}^3$–ban metszi magát), és ebből kombinatorikus számítási mód adódik.
Manolescu-Ozsváth-Sarkar: rácsdiagramok.

Eredmények

A fenti tételek bizonyítása: komoly holomorf (illetve majdnem–holomorf) geometria. Ezeket a módszereket Gromov (1985) és Floer (1988) kezdeményezte/alkalmazta először.

Tétel (Manolescu-Ozsváth-Sarkar, illetve Ozsváth-Stipsicz-Szabó és Ozsváth-Szabó)

A $H_d(K, s)$ csoportok kombinatorikus módszerekkel kiszámíthatók.

Ozsváth-Stipsicz-Szabó és Ozsváth-Szabó: az elmélet kiterjeszthető ún. szinguláris csomókra (ahol a K csomó $\mathbf{R}^3$–ban metszi magát), és ebből kombinatorikus számítási mód adódik.

Manolescu-Ozsváth-Sarkar: rácsdiagramok.

Eredmények

A fenti tételek bizonyítása: komoly holomorf (illetve majdnem–holomorf) geometria. Ezeket a módszereket Gromov (1985) és Floer (1988) kezdeményezte/alkalmazta először.

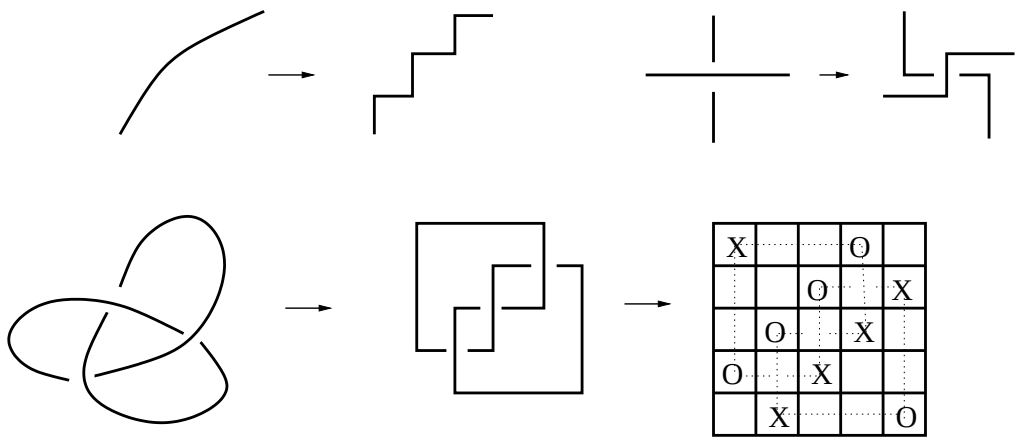
Tétel (Manolescu-Ozsváth-Sarkar, illetve Ozsváth-Stipsicz-Szabó és Ozsváth-Szabó)

A $H_d(K, s)$ csoportok kombinatorikus módszerekkel kiszámíthatók.

Ozsváth-Stipsicz-Szabó és Ozsváth-Szabó: az elmélet kiterjeszthető ún. szinguláris csomókra (ahol a K csomó $\mathbf{R}^3$–ban metszi magát), és ebből kombinatorikus számítási mód adódik.
Manolescu-Ozsváth-Sarkar: rácsdiagramok.

Rácsdiagramok (grid diagrams)

Minden csomó–vetület átalakítható egy olyan vetületté, melyben csak vízszintes és függőleges szakaszok vannak, és mindig a függőleges megy felül. Ezt pedig egy $n \times n$–es táblázatba lehet rendezni, ahol minden oszlopban és minden sorban pontosan egy X és O van, és ezeket összekötve visszakapjuk a csomót. A táblázat neve: rácsdiagram (grid diagram).



A kombinatorikus lánckomplexus

Az alsó és felső illetve a jobb és bal éleket azonosítva a tóruszon kapunk egy diagramot és kapjuk vissza a K csomót.

Az ötlet ezután hasonló mint eddig: legyenek most a vízszintes szakaszok az α–görbék, a függőlegesek pedig a β-k. Ilymódon a $\mathbf{T}_\alpha \cap \mathbf{T}_\beta$ elemek valójában az $\{1, \ldots, n\}$ permutációinak felelnek meg (az $x_i \in \alpha_i$ pont milyen indexű β–n van rajta).

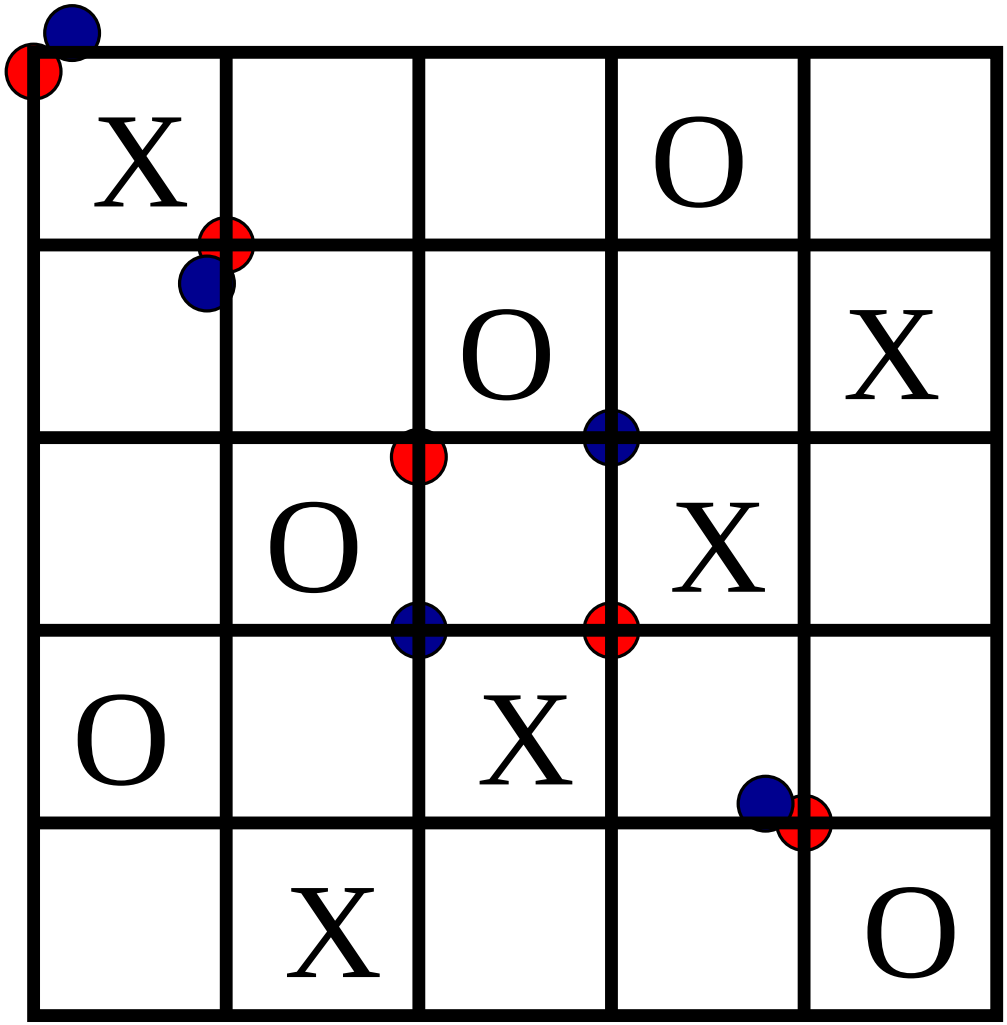
Legyen $n_{xy} = 0$ ha a két permutáció különbsége nem transzpozíció. Ha x és y különbsége transzpozíció, akkor a rácsban négy téglalapot határoznak meg, legyen ekkor n_{xy} az $x \longrightarrow y$ üres négyzetek száma. (A d és s fokok is megadhatóak egy kicsit bonyolultabb kombinatorikus formulával.)

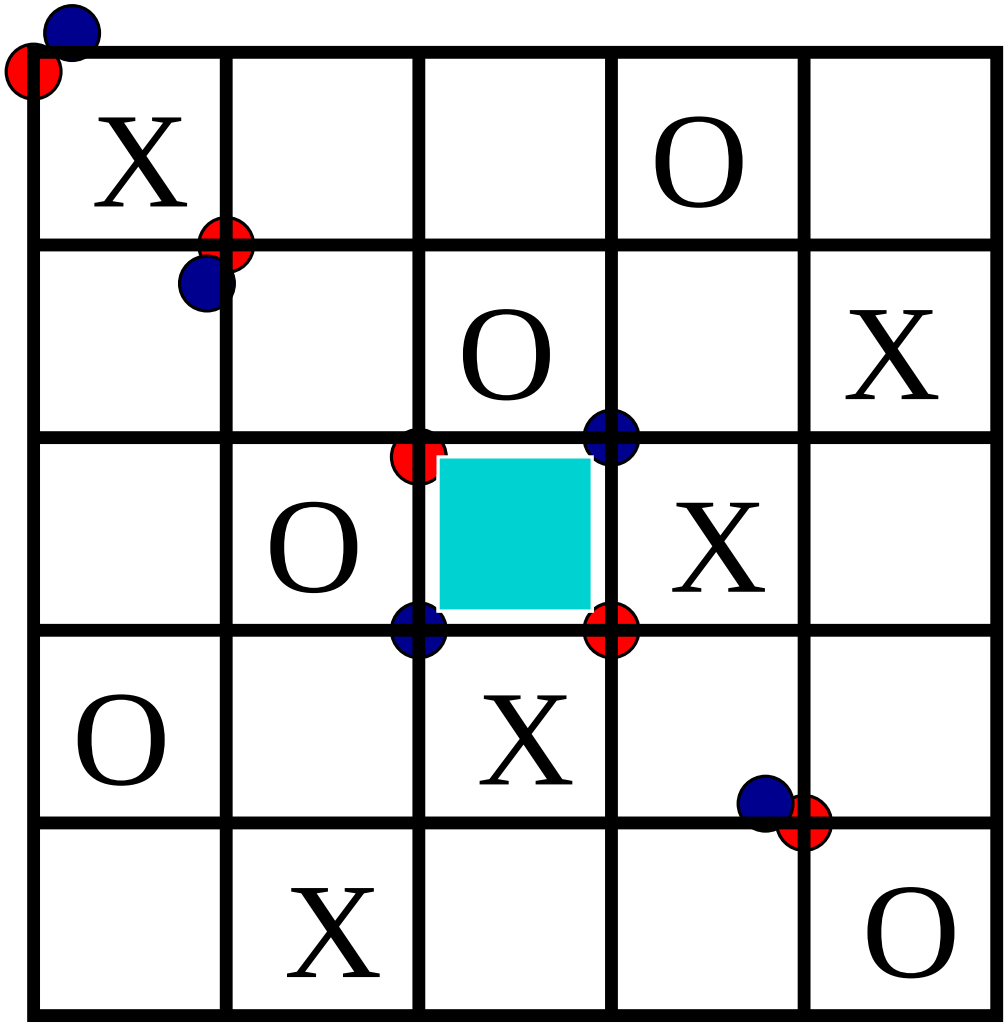
A kombinatorikus lánckomplexus

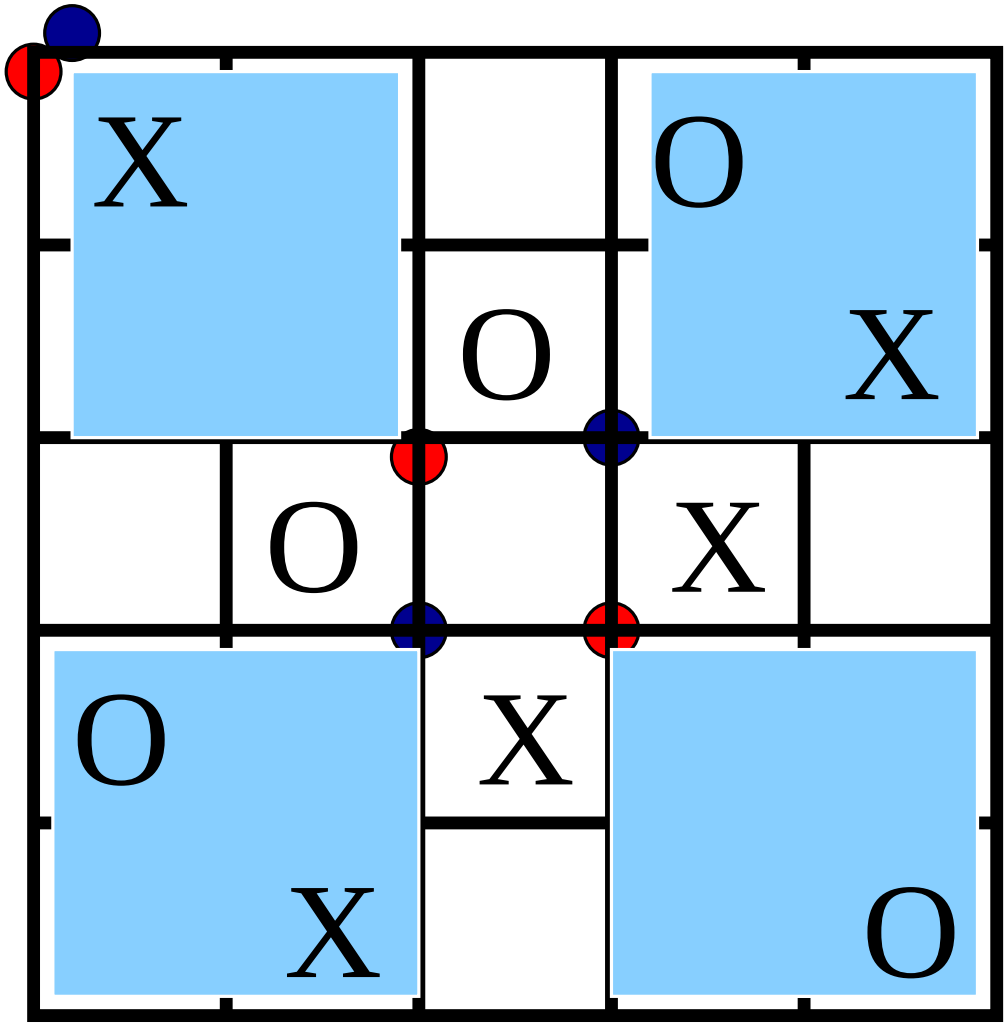
Az alsó és felső illetve a jobb és bal éleket azonosítva a tóruszon kapunk egy diagramot és kapjuk vissza a K csomót.
Az ötlet ezután hasonló mint eddig: legyenek most a vízszintes szakaszok az α–görbék, a függőlegesek pedig a β-k. Ilymódon a $\mathbf{T}_\alpha \cap \mathbf{T}_\beta$ elemek valójában az $\{1, \ldots, n\}$ permutációinak felelnek meg (az $x_i \in \alpha_i$ pont milyen indexű β–n van rajta).
Legyen $n_{xy} = 0$ ha a két permutáció különbsége nem transzpozíció. Ha x és y különbsége transzpozíció, akkor a rácsban négy téglalapot határoznak meg, legyen ekkor n_{xy} az $x \longrightarrow y$ üres négyzetek száma. (A d és s fokok is megadhatóak egy kicsit bonyolultabb kombinatorikus formulával.)

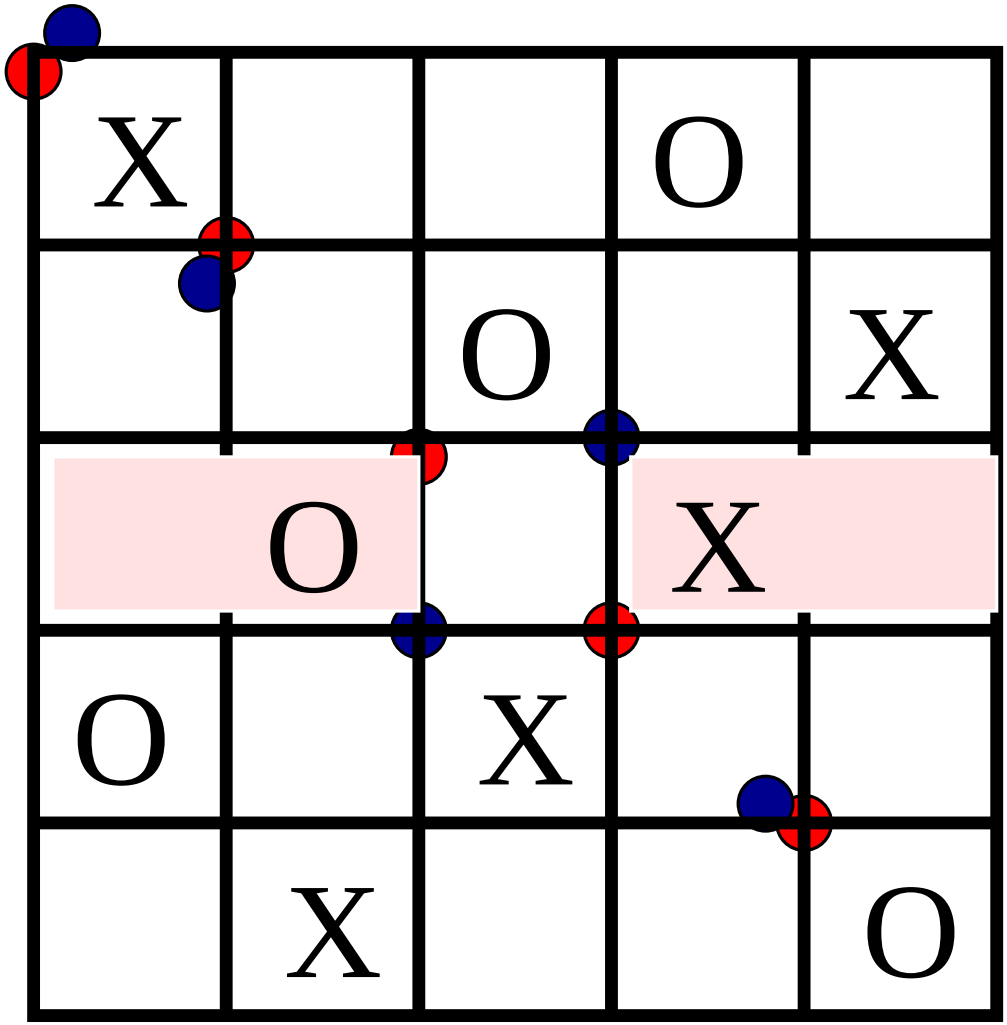
A kombinatorikus lánckomplexus

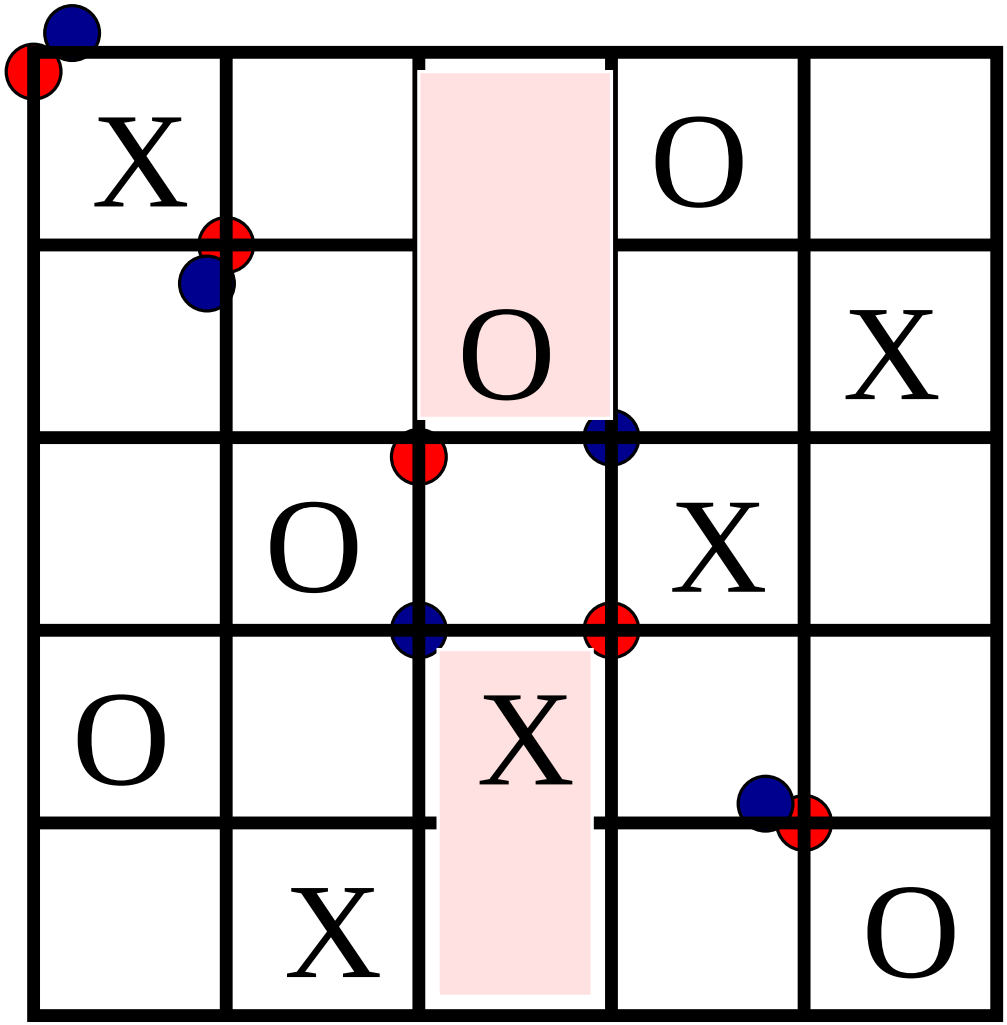
Az alsó és felső illetve a jobb és bal éleket azonosítva a tóruszon kapunk egy diagramot és kapjuk vissza a K csomót.
Az ötlet ezután hasonló mint eddig: legyenek most a vízszintes szakaszok az α–görbék, a függőlegesek pedig a β-k. Ilymódon a $\mathbf{T}_\alpha \cap \mathbf{T}_\beta$ elemek valójában az $\{1, \ldots, n\}$ permutációinak felelnek meg (az $x_i \in \alpha_i$ pont milyen indexű β–n van rajta).
Legyen $n_{xy} = 0$ ha a két permutáció különbsége nem transzpozíció. Ha x és y különbsége transzpozíció, akkor a rácsban négy téglalapot határoznak meg, legyen ekkor n_{xy} az $x \longrightarrow y$ üres négyzetek száma. (A d és s fokok is megadhatóak egy kicsit bonyolultabb kombinatorikus formulával.)


X
O
O
X
O
X
O
X
X
O


X
O
O
X
O
X
O
X
X
O


X
O
O
X
O
X
O
X
X
O


X
O
O
X
O
X
O
X
X
O


X
O
O
X
O
X
O
X
X
O

Tétel (Manolescu-Ozsváth-Sarkar)

Az így kapott lánckomplexus homológiája $H_d(K,s) \otimes (\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2)^{\otimes(n-1)}$ vektortérrel izomorf, tehát kiszámítja a csomó Floer homológiáit.

Tétel (Manolescu-Ozsváth-Szabó-Thurston)

A fenti homológia invarianciája is belátható pusztán kombinatorikus eszközökkel.

A bizonyítás azon alapul, hogy ismertek azok a mozgások, amikkel egy csomó különböző rácsdiagram reprezentációi egymásba transzformálhatóak (ezek a Reidemeister mozgások adaptációi), és ezekre az invariancia belátható.

Tétel (Manolescu-Ozsváth-Sarkar)

Az így kapott lánckomplexus homológiája $H_d(K,s) \otimes (\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2)^{\otimes(n-1)}$ vektortérrel izomorf, tehát kiszámítja a csomó Floer homológiáit.

Tétel (Manolescu-Ozsváth-Szabó-Thurston)

A fenti homológia invarianciája is belátható pusztán kombinatorikus eszközökkel.

A bizonyítás azon alapul, hogy ismertek azok a mozgások, amikkel egy csomó különböző rácsdiagram reprezentációi egymásba transzformálhatóak (ezek a Reidemeister mozgások adaptációi), és ezekre az invariancia belátható.

Tétel (Manolescu-Ozsváth-Sarkar)

Az így kapott lánckomplexus homológiája $H_d(K,s) \otimes (\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2)^{\otimes(n-1)}$ vektortérrel izomorf, tehát kiszámítja a csomó Floer homológiáit.

Tétel (Manolescu-Ozsváth-Szabó-Thurston)

A fenti homológia invarianciája is belátható pusztán kombinatorikus eszközökkel.

A bizonyítás azon alapul, hogy ismertek azok a mozgások, amikkel egy csomó különböző rácsdiagram reprezentációi egymásba transzformálhatóak (ezek a Reidemeister mozgások adaptációi), és ezekre az invariancia belátható.

Kitekintés

Lehetséges általánosítások/variációk:

- Nem $\mathbf{Z}_2$ hanem $\mathbf{Z}$ együtthatók alkalmazása (előjelek). Ki lett dolgozva (MOSzT).
- Az $\mathbf{R}^3$–beli csomók helyett tetszőleges 3–dimenziós sokasában tekintünk csomókat. A holomorf elmélet ki van dolgozva (Ozsváth–Szabó), a triviális csomó vételével 3–sokaságok invariánsait kapjuk (Ozsváth–Szabó homológiák).
  Sarkar–Wang: az invariáns kombinatorikusan kiszámítható, de az invariancia csak a holomorf elmélettel bizonyítható.

Kitekintés

Lehetséges általánosítások/variációk:

- Nem $\mathbf{Z}_2$ hanem $\mathbf{Z}$ együtthatók alkalmazása (előjelek). Ki lett dolgozva (MOSzT).
- Az $\mathbf{R}^3$–beli csomók helyett tetszőleges 3–dimenziós sokasában tekintünk csomókat. A holomorf elmélet ki van dolgozva (Ozsváth–Szabó), a triviális csomó vételével 3–sokaságok invariánsait kapjuk (Ozsváth–Szabó homológiák).
  Sarkar–Wang: az invariáns kombinatorikusan kiszámítható, de az invariancia csak a holomorf elmélettel bizonyítható.

- a vektorterek helyett $\mathbf{Z}_2[U]$ vagy $\mathbf{Z}[U]$ gyűrűk feletti modulusokat tekintünk. Ezek segítségével 4–dimenziós sokaságok Seiberg–Witten invariánsokhoz hasonló invariánsai definiálhatók. Sem a 3– sem a 4–dimenziós invariánsok nem számíthatók kombinatorikusan.
- az invariánsok eredményesen használhatók kontakt topológiai és Legendre csomókra vonatkozó tételek bizonyításában.

- a vektorterek helyett $\mathbf{Z}_2[U]$ vagy $\mathbf{Z}[U]$ gyűrűk feletti modulusokat tekintünk. Ezek segítségével 4–dimenziós sokaságok Seiberg–Witten invariánsokhoz hasonló invariánsai definiálhatók. Sem a 3– sem a 4–dimenziós invariánsok nem számíthatók kombinatorikusan.
- az invariánsok eredményesen használhatók kontakt topológiai és Legendre csomókra vonatkozó tételek bizonyításában.

Egy további eredmény

Tétel (Ozsváth–Stipsicz–Szabó, 2008)

A $\mathbf{Z}_2[U]/(U^2 = 0)$ *és az* $\mathbf{Z}_2[U]/(U^3 = 0)$ *gyűrűk feletti elméletek kombinatorikusan számíthatóak.*

Fekete-fehér gráf és Kauffman állapotok

Egy vetületre színezzük ki a tartományokat sakktábla–szerűen, és definiáljuk a fekete gráfot: csúcsai a fekete tartományok, élei pedig azok a duplapontok, ahol a két fekete tartomány találkozik.

Tény

A Kauffman állapotok egy-egy értelmű megfeleltetésbe állíthatók a fekete gráf feszítőfáival.

(A fekete gráfnak pontosan $|Cr(V)|$ éle, és kb. $\frac{1}{2}|Cr(V)|$ csúcsa van.)
Az $n \times n$–es rácsdiagram $n!$ generátort ad a lánckomplexusban; ismert, hogy egy vetületre a minimális n nagyságrendje $|Cr(V)|$.