Az ikerparadoxon logikai analízise

Székely Gergely

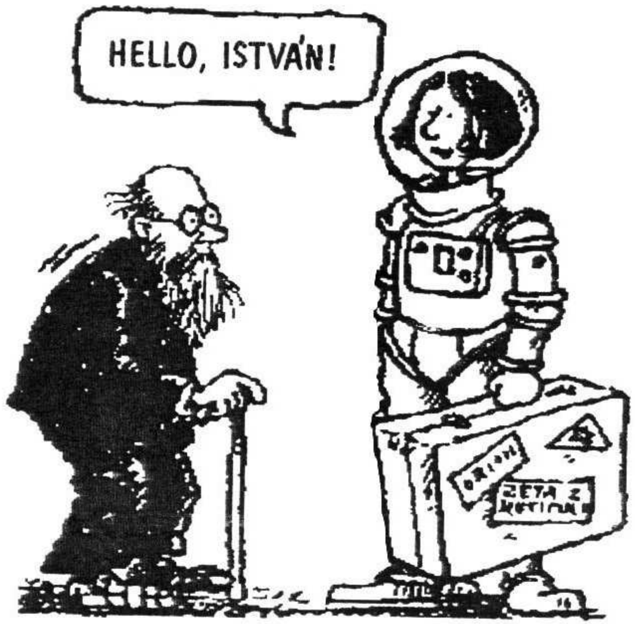
Kapcsolódó cikk megjelenés alatt: Foundations of Physics
(arXiv: gr-qc/0504118)

Társszerzők:

Madarász X. Judit, Németi István

Ikerparadoxon

Egy ikerpár egyik tagja István maradjon otthon nyugalomban, míg a másik tagja Anna tegyen űrutazást (és gyorsuljon sokat). Az ikepraradoxon szerint Anna visszatérésekor fiatalabb lesz, mint *ikertestvére* István.



Logikai keret

$d \geq 2$ – Tér-idő dimenzió.

$$\mathfrak{M} = \langle U; \mathrm{B}, \mathrm{Ob}, \mathrm{IOb}, \mathrm{Ph}, \mathrm{Q}, +, \cdot, \leq, \mathrm{W} \rangle$$

Világkép reláció:
$\mathrm{W}(m, b, \vec{p})$ – „Az m megfigyelő a b body-t a $\vec{p} \in \mathrm{Q}^d$ koordináta-pontban látja."

Logikai keret

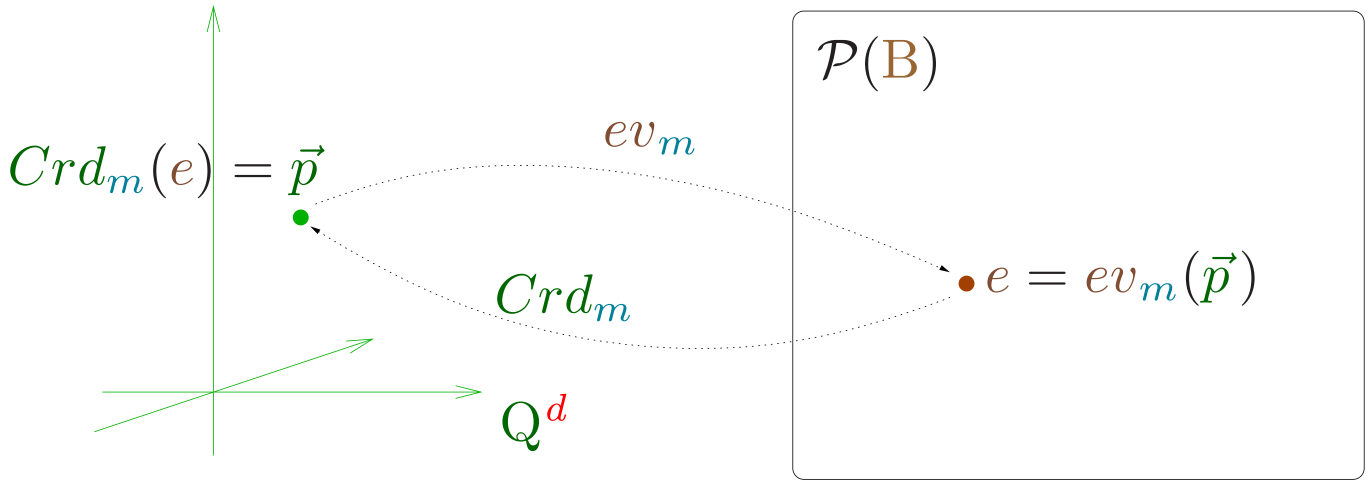
$d \geq 2$ – Tér-idő dimenzió.

$$\mathfrak{M} = \langle U; \mathrm{B}, \mathrm{Ob}, \mathrm{IOb}, \mathrm{Ph}, \mathrm{Q}, +, \cdot, \leq, \mathrm{W} \rangle$$

Világkép reláció:
$\mathrm{W}(m, b, \vec{p})$ – „Az m megfigyelő a b body-t a $\vec{p} \in \mathrm{Q}^d$ koordináta-pontban látja.”

AxFrame $\mathrm{Ob} \cup \mathrm{Ph} \subseteq \mathrm{B}$, $\mathrm{IOb} \subseteq \mathrm{Ob}$, $U = \mathrm{B} \cup \mathrm{Q}$, $\mathrm{B} \cap \mathrm{Q} = \emptyset$ és $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Ob} \times \mathrm{B} \times \mathrm{Q}^d$.

AxEOF $\mathfrak{Q} = \langle \mathrm{Q}; +, \cdot, \leq \rangle$ egy Eukeleideszien rendezett test: $\forall x \in \mathrm{Q} \ \big(0 \leq x \implies \exists y \in \mathrm{Q} \quad x = y \cdot y\big)$

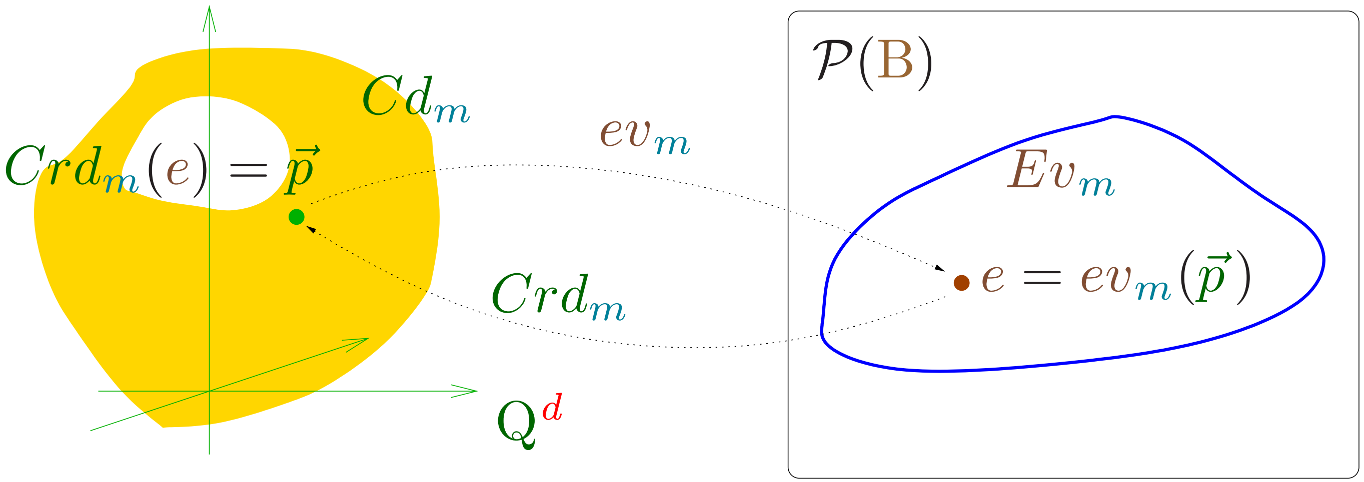


Az m megfigyelő által a $\vec{p}$ koordinátapontban látott esemény:

$$ev_m(\vec{p}) := \{b \in \mathrm{B} : \mathrm{W}(m, b, \vec{p})\}$$

Az e esemény koordinátája az m megfigyelő szerint:

$$Crd_m(e) := \vec{p} \qquad (\text{ ha } e = ev_m(\vec{p}))$$

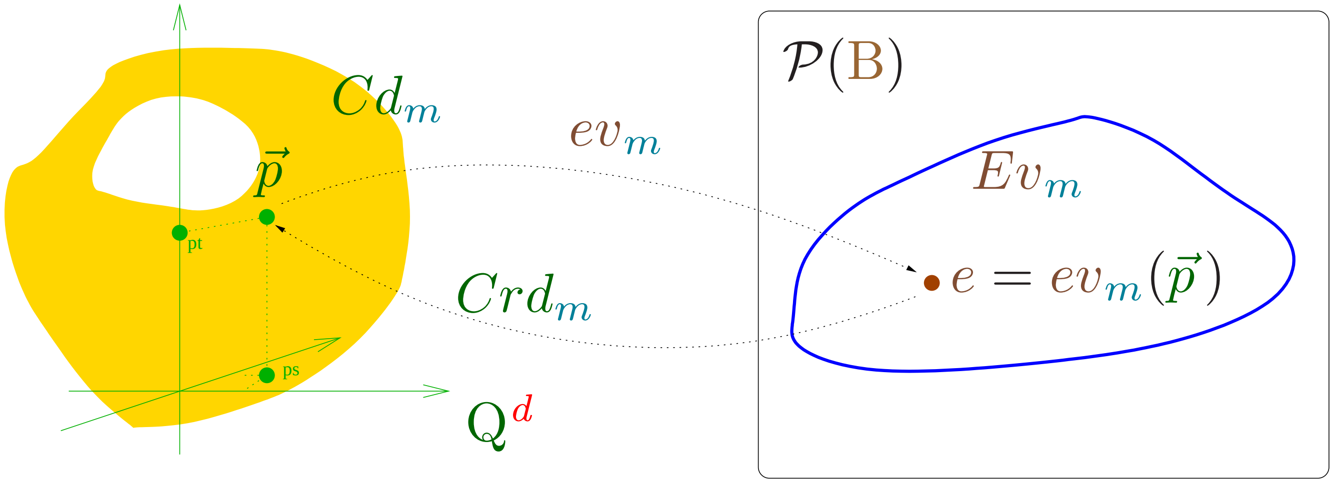


Az m megfigyelő koordináta-tartománya:

$$Cd_m := \{\, \vec{p} \in Q^d \;:\; ev_m(\vec{p}) \neq \emptyset \,\}$$

Az m megfigyelő által látott események összesége:

$$Ev_m := \{\, ev_m(\vec{p}) \;:\; \vec{p} \in Cd_m \,\}$$

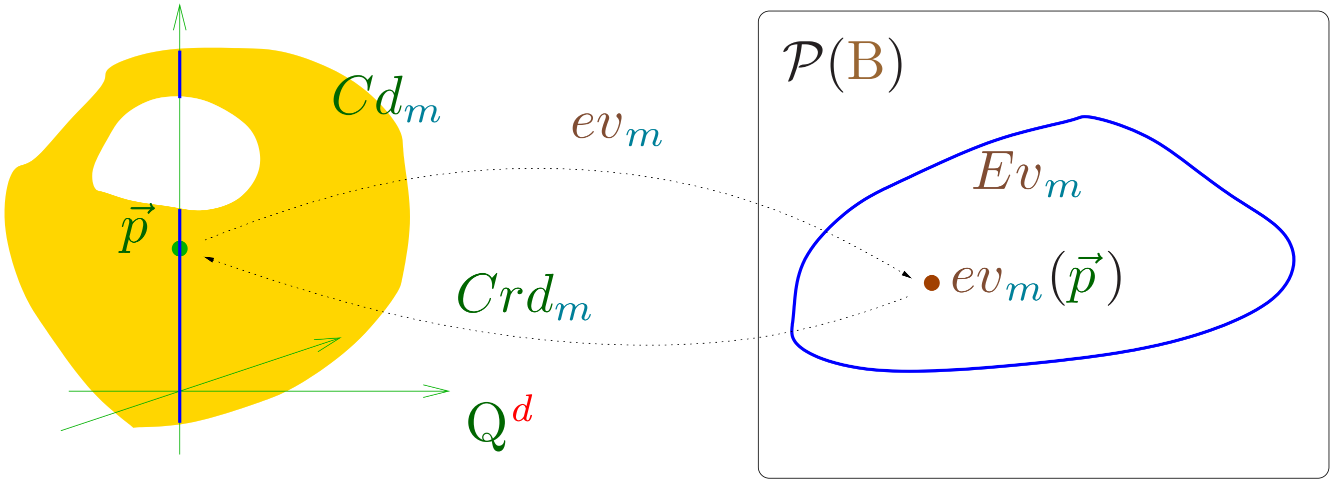


A $\vec{p} \in Q^d$ koordináta-pont térkomopnense:

$$\vec{p}_s := \langle p_2, \ldots, p_d \rangle$$

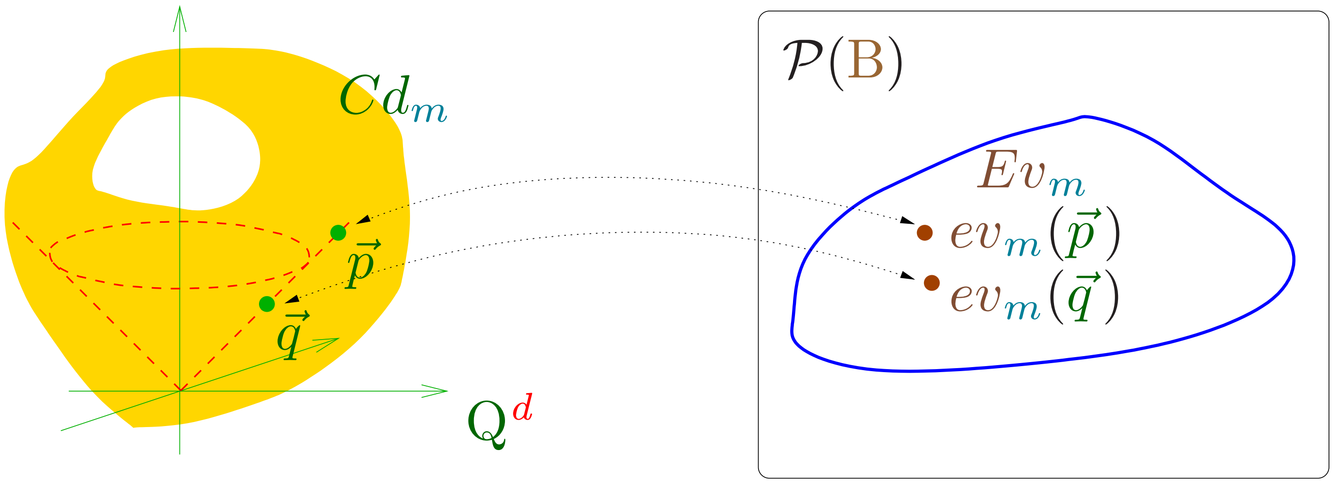
Az időkomponense pedig:

$$p_t := p_1$$



AxSelf$^-$ A megfigyelők önmagukat állni látják:

$$\forall m \in \mathrm{Ob}\ \ \forall \vec{p} \in Cd_m \quad \big(m \in ev_m(\vec{p}) \iff \vec{p}_s = \vec{o} \,\big)$$



AxPh$_0$ Az inerciális megfigyelők pontosan az 1 meredekségű koordináta pontpárokon látnak fotonokat keresztül menni:

$$\forall m \in \mathrm{IOb}\ \ \forall \vec{p}, \vec{q} \in \mathrm{Q}^d\ \ \big(|\vec{p}_s - \vec{q}_s| = |p_t - q_t| \iff \mathrm{Ph} \cap ev_m(\vec{p}\,) \cap ev_m(\vec{q}\,) \neq \emptyset \big)$$

AxEv Az inerciális megfigyelők ugyan azokat az eseményeket látják:

$$\forall m, k \in \mathrm{IOb} \quad Ev_m = Ev_k$$

AxEv Az inerciális megfigyelők ugyan azokat az eseményeket látják:

$$\forall m, k \in \mathrm{IOb} \quad Ev_m = Ev_k$$

$$\boxed{\mathsf{Specrel}_d^- := \{\mathsf{AxSelf}^-, \mathsf{AxPh}, \mathsf{AxEv}\}}$$

Ha $d \geq 3$, akkor $\mathsf{Specrel}_d^-$-ból már következnek a legismertebb paradigmatikus effektusok:

1. „mozgó órák lelassulnak”
2. „mozgó méter-rudak megrövidülnek”
3. „mozgó órák kiállnak a szinkronból”

Az e és f események között **eltelt idő** az m megfigyelő szerint:

$$\mathsf{time}_m(e, f) := |Crd_m(e)_t - Crd_m(f)_t|$$

Az e és f események között **eltelt idő** az m megfigyelő szerint:

$$\mathsf{time}_m(e, f) := |Crd_m(e)_t - Crd_m(f)_t|$$

Az e és f események **egyidejűek** az m megfigyelő szerint, ha 0 a köztük eltelt idő:

$$e \sim_m f \iff \mathsf{time}_m(e, f) = 0$$

Az e és f események között **eltelt idő** az m megfigyelő szerint:

$$\mathsf{time}_m(e, f) := |Crd_m(e)_t - Crd_m(f)_t|$$

Az e és f események **egyidejűek** az m megfigyelő szerint, ha 0 a köztük eltelt idő:

$$e \sim_m f \iff \mathsf{time}_m(e, f) = 0$$

Az e és f események **távolsága** az m megfigyelő szerint:

$$\mathsf{dist}_m(e, f) := |Crd_m(e)_s - Crd_m(f)_s|$$

AxSimDist Ha az m és k inerciális megfigyelők egyetértenek az e és f események egyidejűségének tényében, akkor egyetértenek a köztük lévő távolságban is:

$$\forall m, k \in \mathrm{IOb}\ \forall e, f \in Ev_m \quad \big(e \sim_m f \wedge e \sim_k f \implies \mathsf{dist}_m(e, f) = \mathsf{dist}_k(e, f) \big)$$

$\mathsf{AxSimDist}$ Ha az m és k inerciális megfigyelők egyetértenek az e és f események egyidejűségének tényében, akkor egyetértenek a köztük lévő távolságban is:

$$\forall m, k \in \mathrm{IOb}\ \forall e, f \in Ev_m \quad \big(e \sim_m f \wedge e \sim_k f \implies \mathsf{dist}_m(e, f) = \mathsf{dist}_k(e, f) \big)$$

$$\boxed{\mathsf{Specrel}_d := \mathsf{Specrel}_d^- \cup \{\mathsf{AxSimDist}\}}$$

Tétel: Tegyük fel $\mathsf{SpecRel}_d$ és legyen $d \geq 3$. Továbbá legyenek $m, k \in \mathrm{IOb}$ és $e, f \in Ev_m$. Ekkor

$$\mathsf{time}_m(e, f)^2 - \mathsf{dist}_m(e, f)^2 = \mathsf{time}_k(e, f)^2 - \mathsf{dist}_k(e, f)^2$$

AxSelf$^+$ Azon idő pillanatok halmaza amiben egy megfigyelő látja önmagát egybefüggő:

$$\forall m \in \mathrm{Ob} \ \ \{\vec{p}_t : m \in ev_m(\vec{p}\ )\} \quad \text{egybefüggő}$$

AxSelf^{+} Azon idő pillanatok halmaza amiben egy megfigyelő látja önmagát egybefüggő:

$$\forall m \in \mathrm{Ob} \;\; \{\vec{p}_t : m \in ev_m(\vec{p}\,)\} \quad \text{egybefüggő}$$

AxAcc Minden megfigyelő életútjának minden pillanatához, van egy inerciális együtt-mozgó megfigyelő, (azaz olyan inerciális megfigyelő aki az adott pillanatban lényegében véve ugyan olyannak látja a világot).

$$\boxed{\mathsf{AccRel}_d := \mathsf{Specrel}_d \cup \{\mathsf{AxAcc}, \mathsf{AxSelf}^{+}\}}$$

Az m megfigyelő által az e_1 és e_2 események között megélt események összessége:

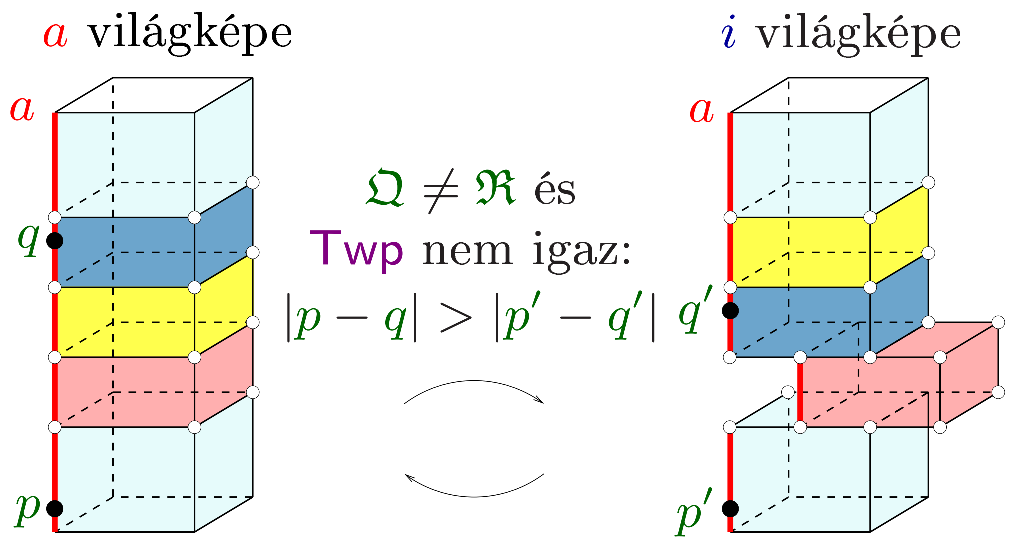
$$Ev_m(e_1, e_2) := \{\, e \in Ev_m \ : \ m \in e \wedge \\ Crd_m(e_1)_t < Crd_m(e)_t < Crd_m(e_2)_t \,\}$$

TwP Legyen a tetszőleges i pedig inerciális megfigyelő. Ekkor i két olyan e, f esemény között, melyben találkozott a-val legalább annyi időt mér, mint a. Továbbá pontosan akkor mér ugyan annyi időt, ha ugyanazokat az eseményeket élte meg e és f között:

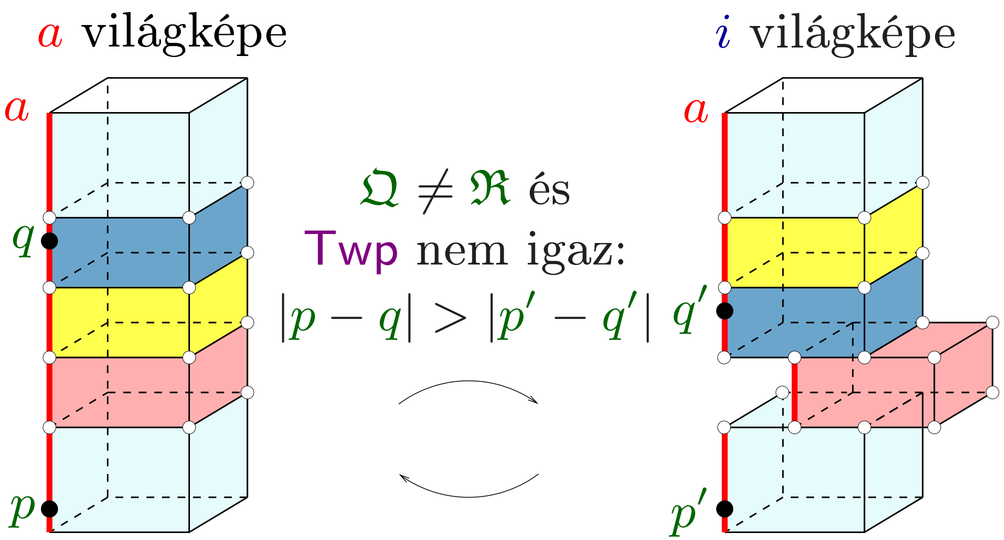
$$\forall i \in \mathrm{IOb}\ \forall a \in \mathrm{Ob}\ \forall e,f \in Ev_i\ \Big(a,i \in e \cap f \Rightarrow \big(\mathsf{time}_i(e,f) = \mathsf{time}_a(e,f) \Leftrightarrow Ev_i(e,f) = Ev_a(e,f)\big) \wedge \mathsf{time}_i(e,f) \geq \mathsf{time}_a(e,f)\Big)$$

Tétel: Tetszőleges $\mathfrak{Q}$ Eukleleideszien rendezett testre pontosan akkor van olyan modellje AccRel_d-nek, amiben nem igaz a Twp, ha $\mathfrak{Q}$ nem izomorf $\mathfrak{R}$-rel a valós számok testével.

Tétel: Tetszőleges $\mathfrak{Q}$ Eukleideszien rendezett testre pontosan akkor van olyan modellje AccRel_d-nek, amiben nem igaz a Twp, ha $\mathfrak{Q}$ nem izomorf $\mathfrak{R}$-rel a valós számok testével.



Tétel: Tetszőleges $\mathfrak{Q}$ Eukleideszien rendezett testre pontosan akkor van olyan modellje AccRel_d-nek, amiben nem igaz a Twp, ha $\mathfrak{Q}$ nem izomorf $\mathfrak{R}$-rel a valós számok testével.



Jelölje $Th(\mathfrak{R})$ a valós számok elsőrendű elméletét.

Köv.: Még $\mathsf{AccRel}_d \cup Th(\mathfrak{R})$ sem elég, hogy bizonyítani tudjuk Twp-t.

IND $\mathbb{Q}$ tetszőleges nem üres, korlátos, elsőrendű formulával definiálható részhalmazának van legkisebb felső korlátja.

IND $\mathcal{Q}$ tetszőleges nem üres, korlátos, elsőrendű formulával definiálható részhalmazának van legkisebb felső korlátja.

$$\boxed{\mathsf{AccRel}_d^+ := \mathsf{AccRel}_d \cup \mathsf{IND}}$$

Tétel: AccRel_d^+-ből már következik a Twp, ha $d \geq 3$.

IND $\mathcal{Q}$ tetszőleges nem üres, korlátos, elsőrendű formulával definiálható részhalmazának van legkisebb felső korlátja.

$$\boxed{\mathsf{AccRel}_d^+ := \mathsf{AccRel}_d \cup \mathsf{IND}}$$

Tétel: AccRel_d^+-ből már következik a Twp, ha $d \geq 3$.

Az IND axióma séma ereje abban áll, hogy a benne lévő formulák egy gazdagabb nyelven vannak megfogalmazva, mint a $\mathfrak{R}$ formulái. Az IND-beli formulák a W világkép-relációról is képesek „beszélni”.

Tétel: AccRel_d^+-ből már következik a Twp, ha $d \geq 3$.

Tétel: Ha AccRel_d^+-ból bármelyik axiómát elhagyjuk már nem következik a Twp.

Így valamilyen értelemben AccRel^+ egy „válasz" arra a kérdésre, hogy: „Miért igaz az ikerparadoxon?"