Doktori Értekezés Tézisei

First-Order Logic Investigation of Relativity Theory with an Emphasis on Accelerated Observers

Székely Gergely

Témavezetők: Andréka Hajnal,
tudományos osztályvezető,
MTA doktora

Madarász X. Judit,
tudományos munkatárs, Ph.D.

Matematika Doktori Iskola
Elméleti Matematika Program

Iskolavezető: Prof. Laczkovich Miklós
Programvezető: Prof. Szűcs András

Eötvös Loránd Tudományegyetem
2009

1. Bevezetés és általános célkitűzések

A matematikai logika alkalmazása a relativitáselmélet megalapozásában egyáltalán nem új gondolat, korábban már olyan vezető matematikusok és filozófusok is felvetették, mint Hilbert, Reichenbach, Carnap, Gödel, Tarski, Suppes és Friedman. Az Andréka Hajnal és Németi István által vezetett Logika és Relativitáselmélet iskolának a munkái – így ez a dolgozat is – közvetlenül kapcsolódnak ezekhez a kutatásokhoz.

Munkánk továbbá szorosan kapcsolódik Hilbert hatodik problémájához a fizika axiomatizálásához. Sőt bizonyos szempontból túlmutat azon, mert kutatásunk általános célkitűzése nem csak a fizikai elméletek axiomatizálása, hanem az elméletek alapfeltevései (axiómák) és jóslatai (tételek) között lévő logikai kapcsolatok alapos vizsgálata.

A kutatás egy további célkitűzése, hogy a relativitáselméleteket világos és plauzibilis alapfeltevésekkel axiomatizáljuk az elsőrendű logika keretein belül. A kutatás egy másik célja, hogy az elméletek meglepő tételeit (pl. ikerparadoxon) néhány meggyőző axiómából bizonyítsuk, valamint az, hogy megszabadítsuk az elméleteket a rejtett feltevésektől azáltal, hogy explicit axiómákra cseréljük őket. További cél a fizikai elméletek axiomatizálása a matematika megalapozásához hasonló módon.

Több oka is van annak, hogy a matematika megalapozása az elsőrendű logikai keretei között történt. Ezen okok egyike, hogy az elsőrendű logikai axiomatizálás felszínre hozza az elmélet rejtett feltevéseit. Egy másik ok az, hogy az elsőrendű logikához tartozik teljes kalkulus, míg a másodrendű (és így bármely magasabbrendű) logikához nincs ilyen kalkulus.

Az axiomatikus megközelítés további előnye, hogy ha van egy axiómarendszerünk, akkor megvizsgálhatjuk, hogy mely axiómák felelnek az elmélet egy adott következményéért. Ez a fajta fordított gondolkodásmód segíthet a relativitáselmélet „miért" kérdéseinek megválaszolásában. Például, minél kevesebb axiómából bizonyítjuk az ikerparadoxont, annál jobb választ adunk arra a kérdésre, hogy „Miért igaz az ikerparadoxon?". A [12] cikk részletezi a jelen dolgozat módszereinek a „miért" típusú kérdések megválaszolására történő alkalmazását. A dolgozat több kérdést is megvizsgál ebből a szempontból.

2. Alkalmazott módszerek

A dolgozat alapvetően az elsőrendű logika szokásos módszereit használja, beleértve bizonyos modellelméleti tételeket is, mint például a Gödel teljességi tétel. Ahhoz, hogy a gyorsuló megfigyelőkkel kapcsolatos eredményeket az elsőrendű logika keretein belül tartsuk, a valós analízis bizonyos módszereit és tételeit ki kellett terjeszteni tetszőleges rendezett testekre.

3. Tézisek

Ahhoz, hogy megfogalmazzuk a dolgozat eredményeit, bevezetünk egy elsőrendű nyelvet. Ehhez rögzítünk egy $d \geq 2$ természetes számot a téridő dimenziójának. Az elsőrendű nyelvünk a következő nemlogikai jeleket tartalmazza:

$$\{\, \mathrm{B}, \mathrm{Ob}, \mathrm{IOb}, \mathrm{Ph}, \mathrm{Q}, +, \cdot, <, \mathrm{W} \,\},$$

ahol B (próbatestek), Ob (megfigyelők), IOb (inerciális megfigyelők), Ph (fényjelek) és Q (mennyiségek) egyváltozós relációjelek; $+$ és $\cdot$ kétváltozós függvényjelek és $<$ egy relációjel (műveletek és rendezés a Q-n); továbbá W (világkép-reláció) egy $2{+}d$ változós relációjel.

$\mathrm{B}(x)$, $\mathrm{Ob}(x)$, $\mathrm{IOb}(x)$, $\mathrm{Ph}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$ (formális) kifejezéseket úgy fordítjuk természetes nyelvre, hogy „x egy próbatest”, „x egy megfigyelő”, „x egy inerciális megfigyelő”, „x egy fényjel”, „x egy mennyiség”. A világkép-reláció W segítségével tudunk koordinátázásról beszélni azáltal, hogy a $\mathrm{W}(x, y, z_1, \ldots, z_d)$ kifejezést úgy fordítjuk, hogy „az x megfigyelő az y próbatestet a $\langle z_1, \ldots, z_d\rangle$ téridőpontban koordinátázza” (azaz $\langle z_2, \ldots, z_d\rangle$ térpontban és a z_1 időpontban). Az első axiómánkban fogalmazzuk meg a legalapvetőbb keretfeltevéseinket. Például azt, hogy az inerciális megfigyelők is megfigyelők.

AxFrame $\mathrm{Ob} \cup \mathrm{Ph} \subseteq \mathrm{B}$, $\mathrm{IOb} \subseteq \mathrm{Ob}$, $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Ob} \times \mathrm{B} \times \mathrm{Q}^d$, $\mathrm{B} \cap \mathrm{Q} = \emptyset$. A $+$ és a $\cdot$ kétváltozós műveletek és a $<$ egy kétváltozós reláció Q-n.

Ahhoz, hogy össze lehessen adni, szorozni és hasonlítani a megfigyelők méréseit, egy algebrai struktúrával látjuk el a mennyiségek halmazát a következő axióma segítségével.

AxEOF A mennyiségek struktúrája $\langle \mathrm{Q}; +, \cdot, < \rangle$ egy Euklideszien rendezett test, azaz olyan lineárisan rendezett test, ahol minden pozitív elemnek van négyzetgyöke.

Az AxFrame és AxEOF axiómákat a logikai keretünk részeként kezeljük, és így minden további figyelmeztetés nélkül feltesszük őket.

3.1. Óraparadoxon

Az első eredmény az óraparadoxon (az ikerparadoxon inerciális megfigyelőkkel történő közelítésének) egy geometriai karakterizációja egy olyan kinematikai axiómarendszeren belül, ami csak a következő négy axiómát tartalmazza:

AxSelf Egy *inerciális* megfigyelő pontosan akkor látja (koordinátázza) magát egy téridőpontban, ha a pont térkomponense az origó, azaz a $\langle 0, \ldots, 0 \rangle$ térpont.

AxLinTime Az *inerciális* megfigyelők világvonalai egyenesek és az idő egyenletesen telik rajtuk.

AxEv Minden *inerciális* megfigyelő pontosan ugyanazokat az eseményeket (próbatestek találkozásait) koordinátázza.

AxShift Bármely *inerciális* megfigyelő, aki lát egy másik *inerciális* megfigyelőt egy adott idő-egységvektorral, az tetszőleges téridőpontban lát egy harmadik megfigyelőt, akinek ugyan az az idő-egységvektora.

$$\boxed{\mathsf{Kinem} := \{\, \mathsf{AxSelf}, \mathsf{AxLinTime}, \mathsf{AxEv}, \mathsf{AxShift} \,\}}$$

Nevezzük óraparadoxon szituációnak azokat a helyzeteket, amiben az óraparadoxon elő tud fordulni, azaz amelyekben egy *inerciális* megfigyelő elhagy egy másikat (otthonmaradó megfigyelő), majd találkozik egy harmadikkal, akivel órát egyeztet és aki visszatér az otthonmaradó megfigyelőhöz.

CP Minden *inerciális* megfigyelő egyetért abban, hogy minden óraparadoxon szituációban, az otthonmaradó megfigyelő több időt mér a két találkozás között, mint a másik két megfigyelő együtt.

NoCP Minden *inerciális* megfigyelő egyetért abban, hogy minden óraparadoxon szituációban, az otthonmaradó megfigyelő pont ugyan annyi időt mér a két találkozás között, mint a másik két megfigyelő együtt.

AntiCP Minden *inerciális* megfigyelő egyetért abban, hogy minden óraparadoxon szituációban, az otthonmaradó megfigyelő kevesebb időt mér a két találkozás között, mint a másik két megfigyelő együtt.

Egy megfigyelő m Minkowski szféráját a többi megfigyelő (múltba mutató esetben az origóra tükrözött) idő-egységvektorainak halmazaként definiáljuk. A m megfigyelő Minkowski szférájára az $MS_m^{\ddagger}$ jelölést használjuk.

A Minkowski szférák segítségével az óraparadoxon (és variánsainak) a következő geometriai karakterizációját sikerült megadni:

Theorem 3.1 *A* Kinem *axiómarendszerből következnek a következők állítások:*

$$\begin{aligned}
\mathsf{CP} &\iff \forall m \in \mathrm{IOb}\ MS_m^{\ddagger}\ \textit{konvex},\\
\mathsf{NoCP} &\iff \forall m \in \mathrm{IOb}\ MS_m^{\ddagger}\ \textit{lapos},\\
\mathsf{AntiCP} &\iff \forall m \in \mathrm{IOb}\ MS_m^{\ddagger}\ \textit{konkáv}.
\end{aligned}$$

Ennek a karakterizációnak több meglepő következménye is van. Ezek formalizálásához szükségünk lesz a következő axiómákra:

$\mathsf{AxThExp}^{+}$ Az *inerciális* megfigyelők tetszőleges irányban tetszőleges (véges) sebességgel mozoghatnak.

$\mathsf{AxThExp}^{*}$ Az *inerciális* megfigyelők tetszőleges irányban tetszőleges (véges) sebességet tetszőlegesen megközelítő sebességgel mozoghatnak.

AbsTime Az *inerciális* megfigyelők egyetértenek az események egyidejűségében.

A következő tétel szerint NoCP formulából logikailag következik AbsTime, ha az $\mathsf{AxThExp}^{+}$ axiómát és Kinem négy axiómáját feltesszük. Azonban, ha $\mathsf{AxThExp}^{+}$ helyett csak az empirikusabb $\mathsf{AxThExp}^{*}$ axiómát tesszük fel, akkor NoCP-ből nem következik AbsTime. Ez azért meglepő, mert ezek szerint abból, hogy nem tapasztalunk óraparadoxont a világban, nem tudunk logikailag következtetni az idő Newtoni értelemben vett abszolútságára anélkül, hogy az $\mathsf{AxThExp}^{+}$ elméleti axióma helyett csak az empirikusabb $\mathsf{AxThExp}^{*}$ axiómát tételeznénk fel.

Theorem 3.2

$$\mathsf{AbsTime} \models \mathsf{NoCP},\ \textit{és} \tag{1}$$

$$\mathsf{Kinem} + \mathsf{AxThExp}^{+} + \mathsf{NoCP} \models \mathsf{AbsTime},\ \textit{de} \tag{2}$$

$$\mathsf{Kinem} + \mathsf{AxThExp}^{*} + \mathsf{NoCP} \not\models \mathsf{AbsTime}. \tag{3}$$

A karakterizáció speciális relativitáselméletre vonatkozó következményeinek ismertetéséhez, megadjuk annak egy elsőrendű axióma rendszerét:

AxPh Minden *inerciális* megfigyelő szerint a fényjelek sebessége 1.

AxSymDist Ha két *inerciális* megfigyelő egyetért két esemény egyidejűségének kérdésében, akkor egyetért a térbeli távolságukban is.

AxThExp Az *inerciális* megfigyelők tetszőleges irányban tetszőleges fénynél lassabb sebességgel mozoghatnak.

$$\boxed{\mathsf{SpecRel} := \{\, \mathsf{AxSelf}, \mathsf{AxPh}, \mathsf{AxEv}, \mathsf{AxSymDist} \,\}}$$

A következő állítás következik a SpecRel axiómarendszerből:

SlowTime Az egymáshoz képest mozgó *inerciális* megfigyelők órái lelassulnak.

A SpecRel elméleten belül nem tudjuk összehasonlítani a SlowTime és CP formulákat, mert mind a kettő következik az elméletből. Ezért ehhez az AxPh axiómával kibővített Kinem axiómarendszert használjuk. A következő tétel szerint CP logikailag gyengébb feltevés, mint SlowTime.

Theorem 3.3 *Ha $d \geq 3$, akkor*

$$\mathsf{Kinem} + \mathsf{AxPh} + \mathsf{SlowTime} \models \mathsf{CP}, \quad \textit{de} \tag{4}$$

$$\mathsf{Kinem} + \mathsf{AxPh} + \mathsf{AxThExp} + \mathsf{CP} \not\models \mathsf{SlowTime}. \tag{5}$$

Mint a [10] és [11] hasonló eredményei, a következő tétel is választ ad Andréka, Madarász és Németi egyik publikált kérdésére [1, Question 4.2.17]. A tétel szerint CP logikailag gyengébb feltevés, mint a SpecRel elmélet AxSymDist axiómája.

Theorem 3.4 *Ha $d \geq 3$, akkor*

$$\mathsf{Kinem} + \mathsf{AxPh} + \mathsf{AxSymDist} \models \mathsf{CP}, \quad \textit{de} \tag{6}$$

$$\mathsf{Kinem} + \mathsf{AxPh} + \mathsf{AxThExp} + \mathsf{CP} \not\models \mathsf{AxSymDist}. \tag{7}$$

Ezek az eredmények a [10], [11] és [8] publikációkon alapulnak.

3.2. Relativisztikus dinamika

Az elmélet relativisztikus dinamikai kiterjesztéséhez a relativisztikus tömeget használjuk, mint alap fogalmat. Azt a gondolatot fogjuk formalizálni, hogy egy próbatest relativisztikus tömege egy olyan mennyiség, ami azt fejezi ki, hogy mennyire nehezen változtatja meg a mozgásállapotát. Ehhez felveszünk egy $(d+3)$-változós M relációt és az $\mathrm{M}(b, \vec{p}, x, k)$ (formális) kifejezést úgy fordítjuk, hogy „az m megfigyelő szerint a b próbatest relativisztikus tömege a $\vec{p}$ téridőpontban x”. Mivel adott b, $\vec{p}$ és k-val több x is lehet M relációban, ezért bevezetjük a következő definíciót: b próbatest k megfigyelő szerinti ($\mathsf{m}_k(b, \vec{p})$-el jelölt) tömege a $\vec{p} \in \mathrm{Q}^d$ téridőpontban x, ha az x az egyetlen olyan szám, amire az $\mathrm{M}(b, \vec{p}, x, k)$ reláció fennáll. Ha nincs ilyen x vagy több is van, akkor $\mathsf{m}_k(b, \vec{p})$ definiálatlan.

AxMass Bármely megfigyelő szerint, a próbatestek relativisztikus tömege tetszőleges téridőpontban definiálva van és nem negatív. Továbbá pontosan azokban a téridőpontokban 0, ahol a próbatest nincs jelen.

AxCenter A két *inerciális* próbatest rugalmatlan ütközése során létrejövő *inerciális* próbatest életútja az ütköző próbatestek (téridőbeli) súlyvonalának folytatása.

Egy b próbatest ($\mathsf{m}_0(b)$-al jelölt) nyugalmi tömege $\lambda \in \mathrm{Q}$, ha (1) van olyan megfigyelő, aki szerint b nyugalomban van és b relativisztikus tömege λ, és (2) b relativisztikus tömege λ minden olyan megfigyelő szerint aki szerint b nyugalomban van.

AxSpeed Az *inerciális* próbatestek relativisztikus tömege csak a nyugalmi tömegüktől és a sebességüktől függ.

AxSpeed biztosítja, hogy az $\mathsf{m}_k(b)$ jelölés értelmes.

Ax∀inecoll Minden megfigyelő számára a tetszőleges tömegű és sebességű próbatestek rugalmatlan ütközése realizálódhat.

AxThExp$^{\uparrow}$ Az *inerciális* megfigyelők tetszőleges irányban tetszőleges fénynél lassabb sebességgel mozoghatnak úgy, hogy számukra az idő előre felé telik.

$$\boxed{\mathsf{SpecRelDyn} := \left\{ \mathsf{AxMass}, \mathsf{AxCenter}, \mathsf{AxSpeed}, \mathsf{Ax\forall inecoll}, \mathsf{AxThExp}^{\uparrow} \right\} \cup \mathsf{SpecRel}}$$

Theorem 3.5 *Legyen $d \geq 3$. SpecRelDyn-ből következik, hogy tetszőleges k inerciális megfigyelő és b inerciális próbatest esetén érvényes a következő formula:*

$$\mathsf{m}_0(b) = \sqrt{1 - v_k(b)^2} \cdot \mathsf{m}_k(b).$$

A fenti tétel erősebb, mint az irodalom megfelelő eredményei, mivel kevesebb feltevést használ, viszont ugyanúgy elvezet az einsteini $E = mc^2$ felismeréshez.

Proposition 3.6 SpecRelDyn $\not\models$ ConsMass, *és* SpecRelDyn $\not\models$ ConsMomentum.

A dolgozatban továbbá megadunk egy az AxCenter axiómához hasonló geometriai axiómát ($\mathsf{AxCenter}^+$) ami ekvivalens a relativisztikus tömeg és impulzus megmaradásával (ConsMass és ConsMomentum).
Ezek az eredmények a [2], [3] és [7] publikációkon alapulnak.

3.3. Ikerparadoxon

Az SpecRel axiómarendszerből nem lehet gyorsuló megfigyelőkről szóló (nem triviális) tételeket bizonyítani, mivel minden axiómája csak *inerciális* megfigyelőkről beszél. Ezért felvesszük a következő természetes axiómát:

AxCmv Minden gyorsuló megfigyelő minden általa megélt esemény kis környezetét úgy koordinátázza, mint egy *inerciális* megfigyelő.

Ha a SpecRel axiómarendszerhez hozzávesszük az AxCmv axiómát és két segéd axiómát (AxSelf_0^+, AxEvTr), akkor a következő természetes kiterjesztést kapjuk:

$$\boxed{\mathsf{AccRel}_0 := \mathsf{SpecRel} \cup \left\{ \mathsf{AxCmv}, \mathsf{AxSelf}_0^+, \mathsf{AxEvTr} \right\}}$$

AxSelf_0^+ Egy megfigyelő pontosan akkor koordinátázza magát egy koordináta pontban, ha a pont tér komponense az origó és a megfigyelő koordinátáz valamit ebben a pontban. Továbbá a megfigyelők által megélt események időkomponenseinek halmaza egy intervallum.

AxEvTr Minden megfigyelő megéli azokat az eseményeket, amiben őt megfigyelik.

Meglepő, de AccRel_0-ból nem következik az ikerparadoxon formalizált változata (TwP). Sőt, a következő tétel szerint még akkor sem következik, ha a valós számok teljes elsőrendű elméletét hozzávesszük AccRel_0-hez.

Theorem 3.7 *$Th(\mathbb{R})$ + $\mathsf{AccRel}_0 \not\models \mathsf{TwP}$.*

Első pillantásra ez az eredmény azt sugallja, hogy a relativitáselméletek axiomatizálása nem terjeszthető ki gyorsuló megfigyelőkre az elsőrendű logika keretein belül. Ez elég lehangoló lenne, mivel komoly érvek szólnak az elsőrendű logika alkalmazása mellett, vö. [1] és Chapter 11. A dolgozatban azonban sikerült az elméletünket az elsőrendű logika keretei között tartani, amit valós számok másodrendű szuprémum axiómájának egy elsőrendű axióma sémával (CONT) történő approximálásával oldottunk meg. A következő tétel szerint AccRel_0 a CONT axiómasémával kibővítve már elég erős ahhoz, hogy következzen belőle a TwP formula.

$$\boxed{\mathsf{AccRel} := \mathsf{AccRel} \cup \mathsf{CONT}}$$

Theorem 3.8 *$\mathsf{AccRel} \models \mathsf{TwP}$, ha $d \geq 3$.*

Ezek az eredmények a [4] és [11] publikációkon alapulnak.

3.4. Toronyparadoxon

A dolgozat egy további eredménye az, hogy az AccRel elmélet elég erős ahhoz, hogy a gravitáció óralassító hatásával kapcsolatos tételeket lehessen benne bizonyítani. Azt az állítást fogjuk levezetni az elméletből, hogy „egy torony alján az órák lassabban járnak, mint a tetején”. Ezt az állítást Einstein ekvivalencia elvét használva fordítjuk le AccRel nyelvére. Így gravitáció helyett gyorsulásról és torony helyett űrhajóról fogunk beszélni. Így a fenti mondat a következő alakot ölti: „egy gyorsuló űrhajó végén lassabban járnak az órák, mint az elején.” Ezt az állítást többféleképpen formalizálhatjuk aszerint, hogy milyen távolság és egyidejűség fogalmat használunk.

Egy űrhajót ($>\!\!|b, k, c\rangle$) úgy definiálunk, mint az b, k és c megfigyelők egy egyenes mentén mozgó olyan hármasa, hogy b és c fix távolságra van k-tól k szerint.

Radar egyidejűség és távolság esetén a következő tételt bizonyítottuk:

Theorem 3.9 *Legyen $d \geq 3$. Tegyük fel AccRel-t. Legyen $>\!\!|b, k, c\rangle_{rad}$ egy radar űrhajó (azaz a radar távolság és egyidejűség által meghatározott űrhajó) úgy, hogy a következő feltételek teljesülnek: (i) k pozitív gyorsulású és (ii) az űrhajó és k gyorsulásának iránya megegyezik. Ekkor (1) k világképében a radar egyidejűség szerint b órái lassabban járnak, mint c órái. (2) fényjelekkel összehasonlítva a k, b és c megfigyelők szerint b órái lassabban járnak, mint c órái.*

Minkowski egyidejűség és távolság esetén a következő tételt bizonyítottuk:

Theorem 3.10 *Legyen $d \geq 3$. Tegyük fel* AccRel*-t. Legyen* $\succ\!\!\big|b, k, c\big\rangle_{\mu}$ *egy Minkowski űrhajó (azaz Minkowski távolság és egyidejűség által meghatározott űrhajó) úgy, hogy a következő feltételek teljesülnek: (i) k pozitív gyorsulású, (ii) az űrhajó és k gyorsulásának iránya megegyezik és (iii) b nincs túl hátul k-hoz képest. Ekkor (1) k világképében a Minkowski egyidejűség szerint b órái lassabban járnak, mint c órái. (2) fényjelekkel összehasonlítva a k, b és c megfigyelők szerint b órái lassabban járnak, mint c órái.*

Ezek az eredmények a [6], [5] és [9] publikációkon alapulnak.

3.5. Általános relativitáselmélet

Végül Einstein egyik gondolatát alkalmazva levezetjük az általános relativitáselmélet egy elsőrendű logikai axiómarendszerét AccRel-ből azáltal, hogy megszüntetjük az axiómák szintjén a különb4séget az inerciális és a gyorsuló megfigyelők között, azaz $\mathsf{SpecRel}$ axiómáit a következő vezérelvek szerint módosítjuk:

- az új axiómákban ne szerepeljen az *inerciális* jelző, és
- és az új axiómák legyenek az AccRel elmélet következményei.

Jelöljük mínusz jellel az így módosított axiómákat és AxCmv^- helyett vezessük be a következő axiómákat (melyek „variánsai” az AxCmv^- axiómának):

$\mathsf{AxDiff_n}$ A világkép transzformációk n-szer deriválható függvények.

Minden n természetes számra bevezetjük a következő axiómarendszerét az általános relativitáselméletnek:

$$\boxed{\mathsf{GenRel_n} := \big\{\, \mathsf{AxSelf}^-, \mathsf{AxPh}^-, \mathsf{AxEv}^-, \mathsf{AxSymDist}^-, \mathsf{AxDiff_n} \,\big\} \cup \mathsf{CONT}}$$

Továbbá bevezetünk egy „sima” változatot is:

$$\boxed{\mathsf{GenRel}_\omega := \big\{\, \mathsf{AxSelf}^-, \mathsf{AxPh}^-, \mathsf{AxEv}^-, \mathsf{AxSymDist}^- \,\big\} \cup \big\{\, \mathsf{AxDiff_n} : n \geq 1 \,\big\} \cup \mathsf{CONT}}$$

A következő tételek azt bizonyítják, hogy az axiómarendszereink valóban az általános relativitáselméletet axiomatizálják.

Theorem 3.11 $\mathsf{GenRel_n}$ *teljes az valósan zárt testek feletti n-szer deriválható Lorentz sokaságokra nézve, ha $d \geq 3$.*

Theorem 3.12 GenRel_ω *teljes a valósan zárt testek feletti sima Lorentz sokaságokra nézve, ha $d \geq 3$.*

4. Következtetések

A tézis jól mutatja azt, hogy az elsőrendű logika jól alkalmazható a relativitáselméletek axiomatikus logikai analízisére. Sőt megfelelő axiómasémák használatával, az általános relativitáselmélet is természetesen axiomatizálható az elsőrendű logika keretein belül. Továbbá az általános relativitáselmélet egy elsőrendű logikai axiómarendszerét két természetes lépésben megkaphatjuk a speciális relativitáselmélet egyik axiómarendszeréből úgy, hogy az első lépésben bevezetünk egy köztes elméletet (AccRel).

Hivatkozások

[1] H. Andréka, J. X. Madarász, and I. Németi, with contributions from: A. Andai, G. Sági, I. Sain, and Cs. Tőke. *On the logical structure of relativity theories.* Research report, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungar. Acad. Sci., Budapest, 2002. http://www.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/Contents.html.

[2] H. Andréka, J. X. Madarász, I. Németi, and G. Székely. E=mc^2 derived from geometrical axioms. Research report, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungar. Acad. Sci., Budapest, 2007.

[3] H. Andréka, J. X. Madarász, I. Németi, and G. Székely. Axiomatizing relativistic dynamics without conservation postulates. *Studia Logica*, 89(2):163–186, 2008.

[4] J. X. Madarász, I. Németi, and G. Székely. Twin paradox and the logical foundation of relativity theory. *Found. Phys.*, 36(5):681–714, 2006.

[5] J. X. Madarász, I. Németi, and G. Székely. First-order logic foundation of relativity theories. In D. Gabbay et al., editors, *Mathematical problems from applied logic II.*, pages 217–252. Springer-Verlag, New York, 2007.

[6] J. X. Madarász, I. Németi, and G. Székely. A logical analysis of the time-warp effect of general relativity, 2007. arXiv:0709.2521.

[7] J. X. Madarász and G. Székely. Comparing relativistic and Newtonian dynamics in first order logic. In F. Stadler, editor, *Wiener Kreis und Ungarn*, Veröffentlishungen des Instituts Wiener Kreis, Vienna, 2009. To appear.

[8] G. Székely. A geometrical characterization of the twin paradox and its variants. arXiv:0807.1813. Submitted to Studia Logica, 2009.

[9] G. Székely. A logical investigation on Einstein's principle of equivalence. Manuscript, Budapest, 2008.

[10] G. Székely. Twin paradox in first-order logical approach. TDK paper, Eötvös Loránd Univ., Budapest, 2003. In Hungarian.

[11] G. Székely. A first order logic investigation of the twin paradox and related subjects. Master's thesis, Eötvös Loránd Univ., Budapest, 2004.

[12] G. Székely. Why-questions in physics. In F. Stadler, editor, *Wiener Kreis und Ungarn*, Veröffentlishungen des Instituts Wiener Kreis, Vienna, 2009. To appear, preprinted at: http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00004600/.