

Analízis 3 Gyakorlat
2011. szeptember 13.

1. Konvergens-e? Abszolút konvergens-e? Melyik kritérium alkalmazható?

(a) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

(b) $\sum \frac{2^n}{n!}$

(c) $\sum \frac{\binom{2n}{n}}{5^n}$

(d) $\sum \frac{(-1)^n}{n \log n}$

2. Tegyük fel, hogy $a_n > 0, b_n > 0$ és $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$. Igazoljuk, hogy $\sum a_n$ pontosan akkor konvergens, ha $\sum b_n$ is. Mutassuk meg, hogy a pozitivitást elhagyva már nem igaz az állítás!

3. Számítsuk ki a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ Cauchy szorzatát!

4. a) Legyen $a_n > 0$ minden n -re. Mutassuk meg, hogy

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

és

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

b) Mutassuk meg, hogy a gyökkritérium erősebb, mint a hányadoskritérium: adjunk példát olyan pozitív tagú sorra, melyre alkalmazható a gyökkritérium, de nem alkalmazható a hányadoskritérium.

5. Mely pontokban konvergens az $f_n(x) = \cos(\frac{x}{n})$ függvénysorozat? Egyenletes-e a konvergencia $[0, 1]$ -en, illetve $\mathbb{R}$ -en?

6. Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sor $(-1, 1)$ -en?