

Analízis 3 Gyakorlat
2011. november 15.

Röpdolgozat

1. Mikor mondjuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban?
2. Kontrakció-e az $f(x, y) = (x^2, y/2)$ függvény a $[0, 1] \times [0, 1]$ halmazon?

-
1. Mutassuk meg, hogy ha f és g differenciálható függvények $\mathbb{R}^n$ -en, akkor $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ és $\nabla(\frac{1}{f}) = -f^{-2}\nabla f$ ha $f \neq 0$.
 2. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amelynek minden $(0, 0)^T$ -beli iránymenti deriváltja 0, de f nem folytonos a $(0, 0)^T$ -ban!
 3. Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\partial_1 f = \partial_2 f = 0$, $\mathbb{R}^2$ -en, akkor f állandó! (Igaz marad-e a fenti állítás tetszőleges nyílt $G \subset \mathbb{R}^2$ -en értelmezett függvényekre?)
 4. Tegyük föl, hogy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés és léteznek a $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ parciális deriváltak és korlátosak. Mutassuk meg, hogy f egyenletesen folytonos $\mathbb{R}^2$ -en. (Igaz marad-e az állítás, ha $\mathbb{R}^2$ helyett valamely $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz az f értelmezési tartománya?)
 5. Legyen $f(x, y)^T = x^3 - 3xy^2$. Mutassuk meg, hogy f eleget tesz a $\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ Laplace egyenletnek!
 6. Határozzuk meg, hogy milyen értelemben (szemi)definitek a következő kvadratikus alakok:
 $q_1(h) = -2h_1h_2$, $q_2(h) = 3h_1^2 + h_2^2$, $q_3(h) = -h_1^2$, $q_4(h) = 2h_1^2 - h_2^2$.