

Analízis 3 Gyakorlat
2011. október 11.

1. Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a megadott halmazon:

(a) $f_n(x) = x^n(1 - \sin \frac{\pi}{2}x)$, $H = [0, 1]$ vagy $H = [0, \frac{1}{2}]$

(b) $f_n(x) = x^n(1 - \sin^n \frac{\pi}{2}x)$, $H = [0, 1]$ vagy $H = [0, \frac{1}{2}]$

(c) $f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$, $H = \mathbb{R}$

(d) $f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n} x^n$, $H = [-1, 1]$

(e) $f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n} x^n$, $H = [-1, 1]$.

2. Fejtsük hatványsorba a 0 körül:

(a) $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

(b) $f(x) = \cos(1 - x^2)$

(c) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

(d) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^\alpha}$

(e) $f(x) = \log(x+1)$

(f) $f(x) = (x+1)^x$

Hol konvergens a hatványsor az a), b), c), e) esetekben?

3. Adjuk meg $\mathbb{R}^n$ -ben nyílt halmazok egy olyan megszámlálható $\mathcal{B}$ rendszerét (bázisát), hogy minden $G \subset \mathbb{R}^n$ nyíltra legyen $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$, hogy $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

4. Metrika-e a $C(\mathbb{R})$ téren a $\varrho(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$ függvény?

5. Metrika-e a $C[0, 1]$ téren a $\varrho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx$ függvény?

6. Igazoljuk, hogy a $\varrho(f, g) = |f(0) - g(0)|$ függvény metrika $C[0, 1]$ -en. $f \equiv 0$ -ra mi lesz a $B(f, 1)$?

7. Lássuk be, hogy egy (M, ϱ) metrikus térben tetszőleges $A \subset X$ -re δA zárt!

8. Lássuk be, hogy egy (M, ϱ) metrikus térben tetszőleges $A \subset X$ -re $\delta(\delta A) \subset \delta A$!

9. Igazoljuk, hogy az $A = \{f \in C[a, b] : \forall x \in [a, b] (f(x) \geq 0)\}$ zárt a ϱ_{sup} metrikában!