

Analízis haladó gyakorlat

3. feladatsor

2013. február 28.

1. Melyik a gömbbe írható maximális térfogatú henger?
2. Bizonyítsuk be, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ -re $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$ teljesül!
3. Határozzuk meg az $f(x) = x^5 + 8x + 3$ függvény $x_0 = 2$ pontbeli érintőjének egyenletét!
4. Hol lesz a $x^3 - 8x^2 + x + 1$ érintője vízszintes?
5. Igazoljuk, hogy az $x^5 - 5x + 2$ polinomnak három valós gyöke van!
6. Mutassuk meg, hogy $a, b, c > 0$ esetén $a + b + c \leq \sqrt[3]{9} \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3}$.
7. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n},$$

ha $a_i > 0$.

8. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ differenciálható és minden $x \in \mathbb{R}$ -re az x pontbeli érintője az x tengely az $x - a$ pontban metszi, akkor f exponenciális függvény!
9. Bizonyítsuk be az előadáson kimondott, de nem bizonyított Cauchy-féle maradéktagos Taylor formulát azaz mutassuk meg, hogy ha f , $(n+1)$ -szer differenciálható az $[a, x]$ -en akkor létezik $d \in (a, x)$, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(d)}{n!} (x-d)^n (x-a).$$

10. A $\cos$ függvény Taylor-sorának segítségével határozzuk meg a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ határértéket!
11. Adjuk meg az $f(x) = \log(1+x)$, $a = 0$ pont körüli 9-edfokú Taylor polinomját és a Lagrange maradéktag segítségével adjunk becslést arra, hogy mekkora hibát követünk el akkor, ha a $[0, 1]$ intervallumon a Taylor polinommal közelítjük f -et.
12. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken:

- $\frac{e^{-x}}{x^2}$
- $x^3 - 5x$
- xe^{-x}

- $x - \log x$
- x^x
- $e^x \cosh x$

13. * Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény akárhányszor deriválható az origóban és minden $n \in \mathbb{N}$ -re $f^{(n)}(0) = 0$.