

Analízis haladó gyakorlat

5. feladatsor

2013. március 21.

1. Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon! Mekkora a $g(x) = x$ és az f által közrezárt síkidom területe?
2. Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amely minden $[a, b]$ intervallumon egyenletesen folytonos, de $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ intervallumokon már nem az!
3. Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amely egyetlen intervallumon sem integrálható!
4. Minek a deriváltja az
 - a) x^α
 - b) $(ax+b)^\alpha$
 - c) xe^x
 - d) $x^2 \sin x$
 - e) $\log x$
 - f) $\sin^2 x$
 - g) $\frac{1}{1+x^2}$
 - h) $\frac{1}{x^2+x+1}$
 - i) $e^{\sin x} \cos x$
 - j) $\frac{1}{1-x^2}$
 - k) $\frac{2x}{1+x^2}$
 - l) $\frac{2x+1}{1+x^2}$függvény?
5. (a) Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvények, akkor $f \cdot g$ is az?
(b) Igaz-e, hogy ha $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvények, akkor $f \cdot g$ is az?
6. Bizonyítsuk be, hogy ha f és g integrálhatóak $[a, b]$ -n, továbbá megegyeznek $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ -n, akkor $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.
7. Véges-e az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény alatti terület az a) $(0, 1]$ b) $[1, \infty)$ intervallumokon?
8. Integrálható-e a Riemann-függvény?
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = ?$
10. Legyen $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = \{x\}$. Adjuk meg $[-1, 2]$ -on az integrálfüggvényeiket.
11. Mutassuk meg, hogy $\sqrt{x}$ a $[0, 1]$ -en nem integrálfüggvény.
12. (a) Legyen $f_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \log(1+t^2)dt$, ha $x \geq 0$. $f_1'(x) = ?$
(b) Legyen $f_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^{x^2} e^{\sin t} dt$, ha $x \geq 0$. $f_2'(x) = ?$
13. a) $\int (x^4 + 1)^8 x^3 dx = ?$ b) $\int 3^x dx = ?$ c) $\int \frac{1}{4+x^2} dx = ?$
d) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = ?$