

Analízis haladó gyakorlat

7. feladatsor
2013. április 12.

1. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

- | | |
|--|---|
| (a) $\int \sqrt{x^3 + x^2} dx = ?$ | (f) $\int \sin x \cdot \log(\tan x) dx = ?$ |
| (b) $\int \frac{x^3 - 8x^2 + 5x + 17}{x^2 + x + 1} dx = ?$ | (g) $\int \frac{\cos x \sin x}{1 + \sin^2 x} dx = ?$ |
| (c) $\int \frac{x^4}{x^4 + 1} dx = ?$ | (h) $\int \frac{1}{\cos^{10} x} dx = ?$ |
| (d) $\int \frac{3^x}{9^x - 3^x + 1} dx = ?$ | (i) $\int (1 - x^2)^n dx = ?$, ha $n \in \mathbb{N}$ |
| (e) $\int \frac{1}{x^3 + 8} dx = ?$ | |

2. Számítsuk ki egy egységsugarú kör területét!

3. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ egyenletű ellipszis területét!

4. Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = x^4 - 4x^2$ függvények által közrezárt területet a $[0, 5]$ intervallumon!

5. Mekkora egy forgásellipszoid térfogata?

6. Forgassuk meg az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény grafikonját az $[1, K]$ intervallumon. Számítsuk ki az így kapott test térfogatát! Hogyan lehetne kiszámítani a felszínét?

7. Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható és f jobbról folytonos az $x_0 \in (a, b)$ pontban. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ integrálfüggvényre

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

teljesül!