

Analízis haladó gyakorlat

8. feladatsor

2013. április 19.

1. Mely α -kra végtelen az $f(x) = x^\alpha$ függvény alatti terület az $(1, \infty)$ intervallumon? És a $(0, 1)$ intervallumon?

2. Kovergens vagy divergens?

(a) $\int_1^\infty \frac{x^3+x}{5x^6+9x^2+x+1} dx$ (b) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ (c) $\int_1^\infty \frac{e^x+x^4}{2^{2x}+x^2} dx$

3. Számítsuk ki az alábbi integrálok értéket!

(a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-x+1} dx$ (c) $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2} dx$
(b) $\int_1^\infty \frac{1}{3^x+1} dx$ (d) $\int_1^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$

4. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \infty$ függvény, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) dx$ létezik és véges, de az $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ integrál nem konvergens?

5. Igazoljuk, hogy ha $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ konvergens, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(nx) dx = 0.$$

6. Mutassunk példát olyan f -re, melyre $\int_0^1 f$ konvergál, de $\int_0^1 |f|$ divergál!

7. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \infty$ nemnegatív folytonos függvény és $\int_0^\infty f(x) dx$ véges.

(a) Igazoljuk, hogy létezik olyan $x_n \rightarrow \infty$ sorozat, hogy $f(x_n) \rightarrow 0$.

(b) Következik-e a feltételből, hogy $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$?