Analízis 3 Alk. Mat. gyakorlat
2. feladatsor
2013. szeptember 16.

1. Adjuk meg azon intervallumokat, ahol az $f(x) = x^n - x^{2n}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens!

2. Igaz-e, hogy (szigorúan) monoton függvények pontonkénti/egyenletes limesze is (szigorúan) monoton?

3. Adjunk példát olyan f_n függvénysorozatra, hogy $f'_n \to g$ egyenletesen, de f_n nem konvergens! Adjunk példát olyanra is, melyre $f'_n \to g$, $f_n \to f$ de $f' \neq g$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha f_n folytonos függvénysorozat egyenletesen tart f-hez a $(0, 1)$ intervallumon, akkor egyenletesen tart f-hez a $[0, 1]$ intervallumon is!

5. Igazoljuk, hogy a $p_0(x) = 0$, $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{x^2 - p_n^2(x)}{2}$ rekurzióval definiált függvénysorozat
   (a) pontonként konvergál a $[-1, 1]$ intervallumon az $f(x) = |x|$ függvényhez!
   (b) $0 \leq |x| - p_n(x) \leq \frac{2}{n+1}$ is teljesül!

6. Mely intervallumokon konverensek az alábbi függvénysorok:
   (a) $\sum \frac{sin(nx)}{n^2}$
   (b) $\sum \cos(nx)$
   (c) $\sum n^x$
   (d) $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$
   (e) $\sum ne^{-nx}$
   (f) $\sum n!x^n$
   (g) $\sum nx^n$
   (h) $\sum r^n x^n$
   (i) $\sum x^{2n}$

7. Adjunk példát olyan hatványsorra amelynek konvergenciatartománya éppen az $(-1, 1)$, $[-1, 1]$, $[-1, 1)$ intervallum!

8. Mutassunk meg hogy egy függvénysor egyenletes konvergenciája és abszolút konvergenciája független fogalmak! Igazoljuk, hogy a $\sum |f_n|$ egyenletes konvergenciájából már következik a $\sum f_n$ egyenletes konvergenciája!

9. Határozzuk meg az alábbi függvények Taylor-sorát a megadott pontok körül! Határozzuk meg a sorok konvergenciasugarát is!
   (a) e^x, $x_0 = 2$
   (b) $\sin x$, $x_0 = 0$
   (c) $\log(1 + x)$, $x_0 = 0$
   (d) 2^x, $x_0 = 5$
   (e) $\frac{1}{x^2}$, $x_0 = 3$
   (f) $\frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$
   (g) e^{-x^2}, $x_0 = 0$
   (h) $\frac{x^{10}}{1+2x}$, $x_0 = 0$

10. Mutassunk példát olyan függvényre, melynek 0-körüli Taylor sora mindenütt konvergens, de csak a $[-1, 1]$ intervallumon állítja elő a függvényt!