Analízis 3 Alk. Mat. gyakorlat
3. feladatsor
2013. szeptember 23.
RöpZh

1. Mikor mondjuk, hogy egy (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a H halmazon?
2. Adjuk meg azon intervallumokat, amelyeken az $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens!

---

1. Legyen a_n a Fibonacci sorozat. Igazoljuk, hogy a $\sum a_n x^n$ sor konvergenciasugara pozitív!
2. Legyenek f és g analitikus függvények az I nyílt intrervallumon. Legyen $x_0 \in I$ valamint $x_n \to x_0$ sorozat, úgy, hogy $x_n \neq x_0$ valamint $f(x_n) = g(x_n)$. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in I$ akkor $f(x) = g(x)$.
3. Fejtsük hatványsorba az x^3 függvényt az 1 körül!
4. Határozzuk meg az alábbi függvények Taylor-sorát a 0 pont körül!
   (a) $\frac{x}{1+x-2x^2}$
   (b) $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$
   (c) $\frac{e^x}{\cos x}$
   (d) $\sin^3 x$
   (e) $\log^2(1-x)$
5. Számoljuk ki 10^{-3} pontossággal:
   (a) $\arctan 1,2$
   (b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$
   (c) $\log 1,25$
   (d) $\sqrt[10]{1000}$
   (e) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$
   (f) $\int_0^1 \cos x^2 dx$
   (g) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$
   (h) $\int_2^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$
6. Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amely minden pontban analitikus, de a 0-körüli Taylor-sora csak a $[-1, 1]$ intervallumon konvergens!
7. Határozzuk meg az $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, ha $x \neq 0$ és $f(0) = 0$-val definiált függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorát!
8. Olvassuk el a Tankönyv 18.42. Tételét és annak bizonyítását!