

Analízis 3 Alk. Mat. gyakorlat

4. feladatsor

2013. október 1.

1. Határozzuk meg az alábbi függvények szintvonalait:

(a) $f(x, y) = x + y$

(c) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

(e) $f(x, y) = |x| + y$

(b) $f(x, y) = x^2 - y$

(d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

(f) $f(x, y) = \min(x^2, y)$

2. Bizonyítsuk be, hogy a $f(x, y) = (2^x y + y^2, xy \sin x, x^2)$ függvény folytonos a síkon!

3. Határozzuk meg az alábbi függvényekre a $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$, a $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ és a $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ határértékeket!

(a) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$

(c) $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

4. Igazoljuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvény folytonos $\mathbb{R}^n$ -en! Igaz-e, hogy egyenletesen folytonos?

5. Folytonos-e az $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$ függvény a $(0, 0)$ pontban?

6. Egy gyárban téglatest alakú, $1m^3$ térfogatú, felül nyitott kartondobozokat gyártanak. Milyen méretei legyenek a kartondoboznak?

7. Határozzuk meg a 2. feladatban szereplő függvény parciális deriváltjait!

8. Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit:

(a) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$

(c) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$

(b) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$

(d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

9. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor folytonos, ha minden $U \subset \mathbb{R}^m$ nyíltra az $f^{-1}(U)$ halmaz (azaz $\{x : f(x) \in U\}$) is nyílt!

10. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos függvények pontonkénti limesze. Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ -re az $f^{-1}([x, \infty))$ halmaz előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszetként, azaz $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ alakban!