

Analízis 3 Alk. Mat. gyakorlat

6. feladatsor

2013. október 15.

1. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény olyan, hogy létezik egy $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény melyre $\nabla F = f$. Mit mondhatunk f parciális deriváltjairól?
2. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$ függvény lokális szélsőértékeit! Határozzuk meg ezeket a $[-5, 5] \times [0, 8]$ téglalapon is!
3. A K és L termékből eladható mennyiséget az alábbi függvények írják le: $f(x, y) = 1000(12 - 3y + 4x)$ illetve $g(x, y) = 1000(3x - 3y)$, ahol x és y jelöli a K és L árát, megfelelően. A K önköltsége 2000, L -é pedig 3000. Mennyi legyen az árak?
4. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diffható és minden x -re $D_1 f(x, x) = D_2 f(x, x) = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor $g(x) = f(x, x)$ konstans!
5. Mely $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre igaz, hogy $D_1 f(x, y) = D_2 f(x, y)$ minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ -re?
6. Legyen $g(x, y) = (x^2 + y, \sin x)$, $f(x, y) = x^2 + y + 1$. Határozzuk meg az $f \circ g$ függvényt és annak parciális deriváltjait!
7. Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazok. Igazoljuk, hogy ekkor $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ is nyílt!
8. Közelítsük az alábbi függvényeket 2. rendű Taylor-polinomjaikkal a megadott pont körül:
 - (a) $f(x, y) = \sin(x + 2y), (0, 0)$
 - (b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2, (1, 1)$
 - (c) $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos y, (1, 0)$
 - (d) $f(x, y) = \sin(xy), (1, \pi/2)$
9. Keressünk lineáris és kvadratikus közelítést a $\frac{(3.98-1)^2}{(5.97-3)^2}$ kifejezésre. Hasonlítsuk össze a pontos értékkel (kalkulátorral számolva)!