

Analízis 3 Alk. Mat. gyakorlat

7. feladatsor

2013. november 4.

1. Legyen $a) u(x, y) = f(x + y, xy)$ $b) u(x, y) = g(x^2 + y^2, xy)$ $c) u(x, y) = h(\frac{x}{y}, \frac{y}{x})$. Határozzuk meg az u parciális deriváltjait!
2. Legyen $f(x, y) = (y^2, y - x)$. Számítsuk ki a df lineáris leképezést! Melyik $u \in \mathbb{R}^2$ pontok környezetében létezik olyan $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fv, amire $f(g(u)) = u$?
3. Legyenek f és $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ folyt. diffható fv-ek, és jelölje (f, g) a skalárszorzatukat (ez tehát egy $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ fv). Mennyi lesz $d(f, g)$?
4. Tudjuk, hogy a és b fizikai mennyiségek az idő függvényei. Határozzuk meg a $T(a, b)$ függvény idő szerinti deriváltját, ha ismerjük T parciális deriváltjait!
5. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ és $f : H \rightarrow \mathbb{R}^m$ folytonos függvény. Igazoljuk, hogy ha H korlátos és zárt akkor $f(H)$ is az! Mutassunk példát arra, hogy H zártóságából nem következik $f(H)$ zártága!
6. Ellenőrizzük az $f(x, y) = x^2 + y$ függvényre, hogy annak gradiensei merőlegesek szintvonalainak érintőjeire!
7. Határozzuk meg az
 - (a) $f(x, y) = xy$ legnagyobb értékét az $x^2 + y^2 = 1$
 - (b) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ legnagyobb értékét az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 - (c) $f(x, y, z) = xyz$ legnagyobb értékét az $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

feltétel mellett!

8. Tekintsük az $\{(x, y) : x \log y + y \log x = 1\}$ ponthalmazt. Tegyük fel, hogy az $(e, 1)$ pont környezetében az y kifejezhető x -ből $y(x)$ folytonosan diffható függvényként! Határozzuk meg az y függvény e pontbeli érintőjét!
9. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy egy $f : H \rightarrow H$ függvény *kontrakció*, ha valamely $0 < q < 1$ számra bármely $x, y \in H$ -ra

$$|f(x) - f(y)| < q|x - y|$$

teljesül. x -et f *fixpontjának* nevezzük, ha $f(x) = x$. Igazoljuk, hogy

- (a) egy kontrakciónak legfeljebb 1 fixpontja van!
- (b) ha $H = [0, 1]^n$, akkor f -nek van fixpontja!
- (c) ha $H = \mathbb{R}^n$ vagy annak tetszőleges zárt részhalmaza, akkor f -nek van fixpontja!
- (d) ha $H = (0, 1)^n$ akkor már nem feltétlenül van fixpont!