

Analízis 3 Alk. Mat. gyakorlat

9. feladatsor

2013. november 18.

1. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima függvények. Az alábbi kifejezések közül melyeknek van értelme?

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|--|
| (a) ∇f | (e) $\operatorname{div} F$ | (i) $F \cdot G$ | (m) $\nabla \times (\nabla f)$ |
| (b) $\nabla \cdot f$ | (f) $\operatorname{rot} F$ | (j) $(\operatorname{grad} f) \cdot F$ | (n) $\nabla \times (\operatorname{rot}(\operatorname{div} f))$ |
| (c) $\operatorname{rot} f$ | (g) $\nabla \times f$ | (k) $(F \times G) + g$ | (o) $\nabla \times (\nabla \cdot F)$ |
| (d) ∇F | (h) $f \cdot g$ | (l) $\nabla \cdot (fF + G)$ | (p) $\operatorname{rot}((F \times G)f)$ |

2. Számítsuk ki a rotációját és divergenciáját a következő függvényeknek:

- (a) $F(x, y, z) = (x^3, 2y + 1, z)$
- (b) $F(x, y, z) = (\sin(x + y + z), e^{x+y}, z)$
- (c) $F(x, y, z) = (\log(x^2 + y^2), 2z + x, 1)$

3. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sima függvény és $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Számoljuk ki a $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f(r)))$ illetve a $\operatorname{div}(f(r)(x, y, z))$ értékeket!

4. Legyenek $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima függvények. Számítsuk ki a parciális deriváltjaik segítségével a $\nabla \cdot (\nabla \times F)$ és $\nabla \times (\nabla f)$ függvényeket!

5. Adott $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sima és legyen $F = -\nabla V$, $c(t)$ egy trajektóriája az F vektormezőnek. Mutassuk meg, hogy $V(c(t))$ a t -nek monoton csökkenő függvénye!

6. Fejezzük ki a többi vektorművelettel, ha $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima függvények:

- (a) $\nabla \cdot (fF)$
- (b) $\nabla \cdot (F \times G)$
- (c) $\nabla \times (fF)$
- (d) $L(fg)$, ahol L a Laplace-operátor
- (e) $\nabla \cdot (f\nabla g)$
- (f) $\nabla \cdot ((\nabla f) \times (\nabla g))$
- (g) $\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f)$