

Fejezetek az analízisből

2. Feladatsor

2016. február 16.

1. Határozzuk meg a következő integrálok értékét:

(a) $\iint_{[-1,1]^2} x + y \, dx dy$

(d) $\iint_{[0,\pi] \times [0,1]} xy^{1/8} \, dx dy$

(b) $\iint_{[-1,1] \times [3,4]} \sin(x+y) \, dx dy$

(e) $\iint_{[0,1]^2} y^2 e^x \, dx dy$

(c) $\iint_{[0,\pi] \times [-1,1]} x \, dx dy$

(f) $\iint_{[0,2]^2} ye^{x+y} \, dx dy$

2. Írjunk fel egy-egy integrált az a, b, c oldalú téglatest, az r sugarú félgömb és az r sugarú, m magasságú egyenes körkúp térfogatára. A téglatest esetében számítsuk ki az integrált!

3. Egy téglalap alakú rétet, amelynek oldalai 20 és 40 méter, egyenletesen beborít a lekaszált fű, minden m^2 -re 3 kg jut. 1 kilogramm széna 1 méter távolságra történő elszállítása 5 Ft-ba kerül. Mennyi pénzből lehet az összes szénát a mező közepére viteni? (Az egyváltozós integrálszámításokat nem muszáj végigszámolni.)

4. Osszuk fel az $[1, 2] \times [1, 3]$ tartományt az $x = 1 + \frac{i}{n}$ és $y = 1 + \frac{2j}{n}$ egyenesekkel téglalapokra és határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény felosztásra való alsó közelítő összegét!

5. Számítsuk ki az értékét a megadott tartományon!

(a) $\iint_K x^2 + y^2 \, dx dy$, ahol $K = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq 1 - x\}$

(b) $\iint_K y^2 \sqrt{x} \, dx dy$, ahol $K = \{(x, y) : x \geq 0, x^2 \leq y \leq 10 - x^2\}$

(c) $\iint_K (x+y)^{3/2} \, dx dy$, ahol K az $y = 2x$ az $y = \frac{1}{2}x$ és a $-x + 1$ egyenesek által közrezárt tartomány.

6. Cseréljük fel az integrálokat:

(a)

(b)

(c)

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) \, dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) \, dy dx$$

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) \, dy dx$$

7. (a) Integrálható-e a

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x, y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

függvény?

(b) Mérhető-e a $(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ halmaz?