

Halmazelmélet Gyakorlat
2013. május 8.

1. Hány $n - 1$ dimenziós hipersíkkal fedhető $\mathbb{R}^n$?
2. Igazoljuk, hogy minden $\kappa \geq \aleph_0$ -ra létezik olyan élszínezése a 2^κ számosságú teljes gráfnak, amelyben nincs κ^+ számosságú teljes homogén részgráf!
3. Mikor térberajzolható egy G gráf?
4. Egy $T \subset \mathbb{R}$ zárra legyen $T' = \{x \in T : x \text{ nem izolált}\}$. Indukcióval legyen
 - $T^0 = T$,
 - $T^{\alpha+1} = (T^\alpha)'$,
 - $T^\beta = \bigcap_{\alpha < \beta} T^\alpha$, ha β limeszrendszám.

Igazoljuk, hogy bármely T zárra létezik olyan $\alpha < \omega_1$, hogy $T^\alpha = T^{\alpha+1}$. Minden $\alpha < \omega_1$ -re mutassunk olyan T fát, melyre épp α a minimális ilyen! Mely T -kre lesz $T^\alpha = \emptyset$ valamely α -ra?

5. Színezzük egy G teljes gráf éleit két színnel. Igazoljuk, hogy $|G| = \aleph_0$ esetén létezik két pontdiszjunkt út, egyik az egyik, másik a másik színből, amelyek minden csúcsot lefednek!
6. Adott egy automata, amely ha bedobunk egy érmét, $\aleph_0$ sok érmét dob ki. Kezdetben egy érménk van. Igazoljuk, hogy rosszul játszva ω sok lépésben elveszíthetjük minden pénzünket! Bizonyítsuk be, hogy bármilyen játék esetén megszámlálható sok lépésben veszünk!
7. Bizonyítsuk be, hogy egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha az alábbi feltételek teljesülnek:
 - nem tartalmaz topologikus K_5 -öt és $K_{3,3}$ -at
 - megszámlálható sok csúcs kivételével minden csúcsának foka ≤ 2
 - csúcsainak száma $\leq \mathfrak{c}$.