

Halmazelmélet gyakorlat

2015. április 23.

1. Egy $(P, \leq)$ megszámlálható részbenrendezett halmaz $\mathcal{F} \subset P$ részhalmaza *filter*, ha (1) minden $p, q \in \mathcal{F}$ -re létezik $r \leq p, q$, hogy $r \in \mathcal{F}$ és (2) ha $p \in \mathcal{F}$ és $p \leq q$ akkor $q \in \mathcal{F}$. Egy $\mathcal{D} \subset P$ sűrű, ha minden $p \in P$ -re létezik $q \in \mathcal{D}$, hogy $q \leq p$. Bizonyítsuk be, hogy sűrűek egy megszámláló $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \dots$ sorozatához létezik mindegyiket metsző filter! Igaz marad-e az állítás tetszőlegesen sok sűrűre?
2. Igazoljuk, hogy CH ekvivalens azzal, hogy létezik egy $H \subset \mathbb{R}^2$, melyre minden $x, y \in \mathbb{R}$ -re $|H_x| \leq \aleph_0$ és $|\mathbb{R} \setminus H^y| \leq \aleph_0$.
3. Adott egy automata, amelybe ha bedobunk egy érmét, $\aleph_0$ sok érmét dob ki. Kezdetben egy érménk van. Igazoljuk, hogy rosszul játszva végtelen sok lépésben elveszíthetjük minden pénzünket. Bizonyítsuk be, hogy *bármilyen* játék esetén megszámlálható sok lépésben veszünk!
4. (CH) Igazoljuk, hogy létezik Ramsey-ultrafilter!
5. Lássuk be, hogy nem létezik univerzális Borel halmaz, azaz olyan $B \subset \mathbb{R}^2$ Borel, hogy minden $C \subset \mathbb{R}$ Borelre létezik $x \in \mathbb{R}$, hogy $C = B_x$. (Ötlet: egy $B \subset \mathbb{R}^2$ Borel halmazra az $\{x : (x, x) \in B\}$ halmaz is Borel.)
6. (CH) Mutassuk meg, hogy létezik egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijekció, hogy A első kategóriájú pontosan akkor, ha $f(A)$ nullmértékű!
7. (Beadható) (CH) Mutassuk meg, hogy létezik olyan nem megszámlálható $L \subset \mathbb{R}$ halmaz, amely minden sehol sem sűrű zárt halmazt megszámlálható sok pontban metsz!
8. (Beadható, 05.22-ig) Lássuk be, hogy CH ekvivalens azzal, hogy létezik egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ függvény, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ -re $f(x)$ megszámlálható, és minden $X \subset \mathbb{R}$ nem megszámlálhatóra $\{y : y \in f(x) \text{ valamely } x \in X\text{-re}\} = \mathbb{R}$.