

Halmazelmélet gyakorlat

2013. február 20.

1. A hadseregben a következő szabály vonatkozik a tábori borbélyra: 'A tábori borbély azon tábori személyeknek kell hogy a haját vágja, akik nem vágják a saját hajukat'. Gondoljuk, meg hogy a borbély mindenképpen megszegi a szabályt.
2. Adott egy szálloda végtelen sok szobával, természetes számokkal számozva. Mindegyik szoba egy ágyas, és mindegyikben lakik egy vendég. Érkezik a) 1 b) megszámlálhatóan végtelen sok c) megszámlálhatóan végtelen sok busszal, mindegyikben megszámlálhatóan végtelen sok új vendég. Hogyan tudjuk őket elhelyezni?
3. Igazoljuk, hogy megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése megszámlálható!
4. Hány véges részhalmaza van $\mathbb{N}$ -nek?
5. Hány szakadási helye lehet egy monoton $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek?
6. Póknak nevezzük egy három olyan szakaszból álló alakzatot, melyek egyik végpontja közös. Hány páronként diszjunkt pók helyezhető el a síkon?
7. Hány lokális szélsőértéke lehet egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvénynek?
8. Legyen $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ függvények egy családja, $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Igaz-e, hogy létezik olyan $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, amely mindegyik f_n -t egy idő után 'túlnövi', azaz $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(\forall k \geq m)(f_n(k) \leq g(k))$?
9. Jelölje $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ az $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvények halmazát. Legyen $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ -re $f \sim g$, ha $(\exists n)(\forall m \geq n)(f(m) = g(m))$. Igazoljuk, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció!
10. Mi a topológia az $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ téren? Metrizálható-e? Melyek a kompakt halmazok?
+Mutassunk példát $C[0, 1]$ -ben és $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ -ben korlátos, zárt, de nem kompakt halmazra!
++Létezik-e olyan $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt sorozat, hogy minden $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ -re
 - $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\{m \in \mathbb{N} : f_n(m) = g(m)\}| = \infty$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} |\{m \in \mathbb{N} : f_n(m) = g(m)\}| = \infty$teljesül?
11. Perfekt halmaznak nevezzük $\mathbb{R}$ nemüres, zárt, izolált pont nélküli részhalmazait. Létezik-e megszámlálható perfekt halmaz?
12. Hány különböző részhalmaza adható meg $\mathbb{N}$ -nek úgy, hogy
 - (a) bármely kettő diszjunkt

- (b) bármely kettő metszete véges
- (c) bármely kettő metszete végtelen, de bármely 3 metszete véges
- (d) bármely n metszete végtelen, de bármely $n + 1$ metszete véges
- (e) bármely véges sok metszete végtelen
- (f) bármely A, B -t kiválasztva közülük $A \subset B$ vagy $B \subset A$

+ bármely véges sok metszete végtelen, de bármely végtelen sok metszete véges

++ bármely megszámlálhatóan sok metszete végtelen, de bármely nem megszámlálhatóan sok metszete véges