

Halmazelmélet gyakorlat

2015. február 12.

1. Egy vonatra minden állomáson két ember felszáll, egy pedig leszáll. Lehetséges-e, hogy $\aleph_0$ sok állomás után kiürül a vonat?
2. *Póknak* nevezzük egy pontból kiinduló három nemelfajuló zárt szakasz unióját. Hány páronként diszjunkt pók helyezhető el a síkban?
3. Adott egy $A \subset \mathbb{R}$ megszámlálható halmaz. Igazoljuk, hogy létezik A -nak önmagától diszjunkt eltoltja. Létezik-e nem megszámlálható sok páronként diszjunkt eltolt?
4. Mekkora az alábbi halmazok számossága
 - (a) $\{A : A \subset \mathbb{N} \text{ véges halmaz}\}$
 - (b) $\{A : A \subset \mathbb{N} \text{ végtelen halmaz}\}$
 - (c) $\{\varphi : \varphi \text{ formula a halmazelmélet nyelvén}\}$
 - (d) $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergens}\}$
 - (e) $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : (\forall n)(x_n \in [0, 1])\}$
 - (f) $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ algebrai szám}\}$
 - (g) $\{F \subset [0, 1] : F \text{ zárt}\}$
 - (h) $C[0, 1]$
 - (i) $\{f : f \text{ deriváltfüggvény}\}$
 - (j) $\mathcal{R}[0, 1]$?
5. Mutassuk meg, hogy egy A halmaz pontosan akkor megszámlálható, ha léteznek B és C halmazok úgy, hogy $A \times A = B \cup C$ és B minden vízszintes, C minden függőleges szekciója véges!
6. Hány lokális szélsőértéke lehet egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvénynek?
7. Hány különböző részhalmaza adható meg $\mathbb{N}$ -nek úgy, hogy
 - (a) bármely kettő diszjunkt
 - (b) bármely kettő metszete véges
 - (c) bármely A, B -t kiválasztva közülük $A \subset B$ vagy $B \subset A$
 - (d) bármely kettő metszete végtelen, de bármely 3 metszete véges
 - (e) bármely n metszete végtelen, de bármely $n + 1$ metszete véges
 - (f) bármely megszámlálható sok metszete végtelen, de bármely nem megszámlálható metszete véges?
8. *Perfekt* halmaznak nevezzük $\mathbb{R}$ nemüres, zárt, izolált pont nélküli részhalmazait. Igazoljuk, hogy egy perfekt halmaz nem megszámlálható!
9. (B) Adott $\{(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}} : i \in \mathbb{N}\}$, valós számsorozatok egy megszámlálható családja. Létezik-e olyan $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden i -re $y_n \gg x_n^i$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^i}{y_n} = 0$?