

Halmazelmélet Gyakorlat
2012. március 2.

1. (Rasiowa-Sikorski) Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz. Egy $D \subset P$ *sűrű*, ha $(\forall p \in P)(\exists q \in D)(q \leq p)$. $F \subset P$ *filter*, ha $(\forall p \in F)(p \leq q \implies q \in F)$ és $(\forall p, q \in F)(\exists r \in F)(r \leq p \wedge r \leq q)$. Igazoljuk, hogy sűrű halmazok tetszőleges $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ rendszeréhez van olyan F filter, amelyre $(\forall n)(D_n \cap F \neq \emptyset)$.
2. Lássuk be, hogy minden egységelemes gyűrű valódi ideálja része egy maximális valódi ideálnak!
3. Oldjuk meg az
 - (a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$
 - (b) $f(xy) = f(x)f(y)$
 - (c) $f(x + y) = g(x) + h(y)$ függvényegyenleteket!
4. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^2$ függvény előáll periodikus függvények összegeként! Igaz-e ez x^k -ra?
5. Igazoljuk, hogy van olyan $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ Hamel-bázis, amely sűrű!
6. Hány különböző Hamel-bázis adható meg?
7. Igazoljuk, hogy van univerzális nyílt halmaz, azaz olyan $H \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, hogy minden $U \subset \mathbb{R}$ nyíltra létezik $x \in \mathbb{R}$, hogy $H_x = U$!