Halmazelmélet Gyakorlat
2013. március 6.

1. Teljesül-e a CSB tétel rendezésekre?

2. Igaz-e, hogy minden megszámlálható rendezett halmaz, amelynek van legkisebb eleme, és ennek kivételével minden elemre van azt megelőző és azt követő eleme, és a legkisebb elemnek van szomszédja izomorf $(\mathbb{N}, <)$-bel?

3. Egy $(P, \leq)$ megszámlálható részbenrendezett halmaz $\mathcal{F} \subset P$ részhalmaza *filter*, ha (1) minden $p, q \in \mathcal{F}$-re létezik $r \leq p, q$, hogy $r \in \mathcal{F}$ és (2) ha $p \in \mathcal{F}$ és $p \leq q$ akkor $q \in \mathcal{F}$. Egy $\mathcal{D} \subset P$ sűrű, ha minden $p \in P$-re létezik $q \in \mathcal{D}$, hogy $q \leq p$. Bizonyítsuk be, hogy sűrűek egy megszámló $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots$ sorozatához létezik mindegyiket metsző filter! Igaz marad-e az állítás tetszőlegesen sok sűrűre?

4. Értelmezzük és számoljuk ki: $\aleph_0!$, $\binom{\aleph_0}{2}$, $\binom{\aleph_0}{\aleph_0}$, $\aleph_0^2$, $2^{\aleph_0}$, $\aleph_0^{\aleph_0}$, $\mathfrak{c}^2$, $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$, $\binom{\mathfrak{c}}{\aleph_0}$, $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.

5. Mekkora a számossága a(z)

   (a) $F \subset \mathbb{R}$ zárt halmazok

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Baire-1 függvények

   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvények

   halmazának?

6. Mekkora lehet egy szeparábilis metrikus tér számossága?

7. Bizonyítsuk be (feltéve...), hogy van olyan formula, amely és melynek tagadása sem bizonyítható!

8. Igazoljuk, hogy $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ folytonosan ráképezhető $\mathbb{R}$-re/minden lengyel (teljes, szeparábilis, metrikus) térre!

9. Bizonyítsuk be, hogy minden olyan kétszemélyes játékban, melyben véges sok lépésen belül nyer valamely játékos és mindig véges sok lehetséges lépés van, valakinek van nyerő stratégiája!

10. Adott egy megszámlálható, zárt $A \subset [0, 1]$ halmaz, ketten játszanak: I megnevez egy $0, x_1 x_2 \ldots$ valóst, majd ennek II megpermutálja a jegyeit. I nyer $\iff$ a permutálás után kialakuló valós $\in A$. Mely A-ra van I-nek nyerő stratégiája?

11. Mekkora lehet egy σ-algebra számossága?