

Halmazelmélet gyakorlat

2015. február 26.

1. Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}$ megszámlálható halmaz. Mutassuk meg, hogy létezik $G < \mathbb{R}$ megszámlálható (additív) részcsoporthoz, hogy $A \subset G$!
2. Legyen $\mathcal{H}$ véges $0-1$ sorozatok egy kezdőszeletre zárt végtelen családja, azaz, ha $a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{H}$ és $m < n$ akkor $a_1 a_2 \dots a_m \in \mathcal{H}$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan végtelen $0-1$ sorozat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, hogy minden n -re $x_1 x_2 \dots x_n \in \mathcal{H}$ teljesül!
3. Legyen $G = (V, E)$ nemüres gráf. Azt mondjuk, hogy G teljesíti a $(*)$ tulajdonságot, ha minden $A, B \subset V$ végesre létezik olyan $v \in G$, hogy minden $w \in A$ -ra $(v, w) \in E$ és minden $z \in B$ -re $(v, z) \notin E$.
 - (a) Tegyük fel, hogy G egy $(*)$ tulajdonságú megszámlálhatóan végtelen gráf. Lássuk be, hogy minden megszámlálhatóan végtelen gráf előáll mint G részgráfja!
 - (b) Mutassuk meg, hogy ha G és G' megszámlálható $(*)$ tulajdonságú gráfok, akkor $G \cong G'$!
 - (c) Adjunk példát $(*)$ tulajdonságú gráfra!
4. Bizonyítsuk be, hogy minden olyan kétszemélyes játékban, melyben véges sok lépésen belül nyer valamely játékos és mindig véges sok lehetséges lépés van, valakinek van nyerő stratégiája!
5. (2. feladatsor 6. feladat játéka) Legyen $A \subset [0, 1]$ adott. I és II játsszák a következő játékot: az n -edik lépésben I mond egy x_n számjegyet, II pedig egy y_n számjegyet. II nyer $\iff 0, x_1 y_1 x_2 y_2 \dots \notin A$. Igazoljuk, hogy ha I -nek van nyerő stratégiája, akkor A tartalmaz perfekt halmazt!
6. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$ nem áll elő, mint megszámlálható sok $\mathfrak{c}$ -nél kisebb számosságú halmaz uniója!
7. Hány páronként diszjunkt perfekt részhalmaz adható meg a számegyenesnek?
8. (Beadható) Adott egy $F < \mathbb{C}$ megszámlálható test. Igazoljuk, hogy létezik $F' > F$ megszámlálható algebrailag zárt test!