

Halmazelmélet Gyakorlat
2013. március 13.

1. Igazoljuk, hogy minden egységelemes gyűrűben van maximális valódi ideál!
2. Létezik-e a síknak olyan A részhalmaza, hogy minden $x, y \in A$ -ra $|x - y| \in \mathbb{Q}$, de bármely $z \notin A$ -ra létezik olyan $x \in A$, hogy $|x - z| \notin \mathbb{Q}$?
3. Legyen A egy végtelen halmaz, ekkor $\subset$ részbenrendezést határoz meg $\mathcal{P}(A)$ -n. Ekkor egy $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(A)$ *ultrafilter*, ha filter és minden $S \subset A$ -ra $S^c \in \mathcal{U}$ vagy $S \in \mathcal{U}$. Milyen egy triviális ultrafilter? Létezik-e nemtriviális ultrafilter?
4. Igaz-e, hogy minden összefüggő gráfban van feszítőfa?
5. Létezik-e olyan nem megszámlálható részhalmaza $\mathbb{R}$ -nek, amely minden zárt halmazt megszámlálható sok pontban metsz?
6. Igaz-e, hogy minden F test beágyazható egy algebrailag zárt testbe?
7. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ lengyel terek közül bármely kettő 'mod megszámlálható' homeomorf!
8. Legyen $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ adott. I és II játszik a következő játékot: az n -edik lépésben I mond egy x_n természetes számot, II pedig egy y_n természetes számot. II nyer $\iff 0, x_1 y_1 x_2 y_2 \dots \notin A$. Igazoljuk, hogy I egy nyerő stratégiája meghatároz egy Lipschitz leképezést $\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow A$.
9. Bizonyítsuk be, hogy ha fenti játékban A zárt, akkor valakinek van nyerő stratégiája!
10. Létezik-e univerzális F_σ halmaz, vagyis olyan $U \subset \mathbb{R}^2$, hogy minden $H \subset \mathbb{R}$ F_σ halmazra létezik $x \in \mathbb{R}$, hogy $U^x = H$?
11. Igaz-e, hogy $\mathbb{R} = A \cup B$, ahol $\lambda(A) = 0$ és B első kategóriájú?