

Halmazelmélet gyakorlat

2015. március 5.

1. Létezik-e olyan rendezés $\mathbb{R}$ -en, hogy minden pontnak vannak közvetlen szomszédai?
2. Létezik-e olyan végtelen fa, melynek
 - (a) minden szintje véges, de nincs végtelen ága
 - (b) magassága $> \omega$, de nincs végtelen ága
 - (c) minden szintje véges, de $\mathfrak{c}$ sok ága van
 - (d) * minden szintje megszámlálható, de nincs nem megszámlálható ága
3. Bizonyítsuk be, hogy egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallum nem áll ellő mint megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniója!
4. Létezik-e összegtartó $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ leképezés?
5. Igazoljuk, hogy egy $\mathfrak{c}$ számosságú lineáris rendezés izomorf $(\mathbb{R}, <)$ -bel, ha sűrű, szeparábilis (azaz van olyan megszámlálható részhalmaza, mely minden nyílt intervallumba belemetsz) és teljesíti a Cantor-tulajdonságot!
6. (2. feladatsor 6. feladat játéka, megint) Legyen $A \subset [0, 1]$ adott. I és II játsszák a következő játékot: az n -edik lépésben I mond egy x_n számjegyet, II pedig egy y_n számjegyet. II nyer $\iff 0, x_1 y_1 x_2 y_2 \dots \notin A$. Igazoljuk, hogy ha A zárt, akkor valakinek van nyerő stratégiája!
7. Igazoljuk, hogy a $\mathbb{R}$ minden perfekt részhalmaza tartalmaz a Cantor-halmazzal homeomorf részhalmazt!
8. Létezik-e univerzális nyílt halmaz a síkon, azaz olyan $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, hogy minden $V \subset \mathbb{R}$ nyíltra létezik x , hogy $\{y : (x, y) \in U\} = V$?
9. (Beadható) Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ a számegyenes részhalmazainak egy családja azzal a tulajdonsággal, hogy ha $A, B \in \mathcal{H}$ különbözőek, akkor $A \cap B$ véges. Bizonyítsuk be, hogy $|\mathcal{H}| \leq \mathfrak{c}$.