

Halmazelmélet Gyakorlat
2013. március 20.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden filter $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ -en kiterjeszthető ultrafilterré!
2. Legyen $\mathcal{U}$ ultrafilter $\mathbb{N}$ -en. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ partíciójára $\mathbb{N}$ -nek létezik egyetlen i , hogy $A_i \in \mathcal{U}$.
3. Legyen $\mathcal{U}$ ultrafilter $\mathbb{N}$ -en. Tekintsük a következő ekvivalenciarelációt $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ -en: $f \sim g \iff \{n : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$. Defináljunk rendezést összeadást, szorzást az ekvivalenciosztályok halmazán. Válasszuk ki a kedvenc formulánkat, amely $(\mathbb{N}, +, *, <)$ nyelvén van felírva és igaz $\mathbb{N}$ -ben, majd igazoljuk, hogy teljesül a kapott struktúrában! Igaz-e, hogy a kapott struktúra izomorf $\mathbb{N}$ -nel?
4. Igazoljuk, hogy létezik egy konvergenciafogalom az összes korlátos valós sorozaton, amely az eredeti kiterjesztése, összeadásra és konstanssal való szorzásra természetesen viselkedik!
5. Bizonyítsuk be, hogy minden játék szabályokkal visszavezethető $G(A, X)$ típusú játékra!
6. Legyen $\mathcal{U}$ egy nemtriviális ultrafilter $\mathbb{N}$ -en. Tekintsük a következő játékot: I és II felváltva neveznek meg $0 < n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ természetes számokat. I nyer $\iff [0, n_0) \cup [n_1, n_2) \cup \dots \in \mathcal{U}$. Bizonyítsuk be, hogy egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája!
7. Legyen $A \subset \mathbb{R}$. Tekintsük a következő játékot: I és II felváltva mondanak egymásba skatulyázott nemüres $U_0 \supset V_0 \supset U_1 \supset \dots$ nyíltakat. II nyer $\iff \bigcap U_i \subset A$. Igazoljuk, hogy II -nek pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha A^c első kategóriájú!
8. Létezik-e univerzális Borel halmaz?
9. Képviselők H halmaza állít fel preferenciasorrendet 3 jelölt között. Az eredmény egy közös sorrend. Tegyük fel, hogy a választási rendszer kielégíti az alábbi feltételeket:
 - (a) ha mindenki ugyanazt a sorrendet határozza meg, akkor az eredmény is ez
 - (b) ha X és Y közti sorrendet senki sem változtatja meg, akkor az az eredményben sem változik

Igazoljuk, hogy ha H véges akkor egyetlen ilyen választási rendszer van! Bizonyítsuk be, hogy végtelen H -ra ez már nem igaz!

Megoldatlan feladatok

1. Hány különböző részhalmaza adható meg $\mathbb{N}$ -nek úgy, hogy
+ bármely véges sok metszete végtelen, de bármely végtelen sok metszete véges
++ bármely megszámlálhatóan sok metszete végtelen, de bármely nem megszámlálhatóan sok metszete véges?
2. Legyen $\mathcal{A} = (A, \dots)$ tetszőleges megszámlálható algebrai struktúra. Ekkor ekvivalens:
 - $\text{Aut}(\mathcal{A})$ nem megszámlálható
 - minden véges $B \subset A$ részhalmazra van olyan nemidentikus $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ hogy $\phi|_B$ identitás

Bizonyítandó, hogy $(2) \Rightarrow (1)$.

3. Bizonyítsuk be (feltéve...), hogy van olyan formula, amely és melynek tagadása sem bizonyítható!
4. Igazoljuk, hogy $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ folytonosan ráképezhető $\mathbb{R}$ -re/minden lengyel (teljes, szeparábilis, metrikus) térre!
5. Mekkora lehet egy σ -algebra számossága? (Láttuk, hogy $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ esetén létezik κ számosságú σ -algebra, és, hogy $\aleph_0 \leq \kappa < \mathfrak{c}$ -re pedig nem.)
6. * Bizonyítsuk be minél egyszerűbben, hogy a számegyenesen megadható $\mathfrak{c}$ sok páronként nem homeomorf perfekt halmaz!