

Halmazelmélet gyakorlat

2015. március 12.

1. Egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ halmaz *filter*, ha $\emptyset \notin \mathcal{F}$, minden $A, B \in \mathcal{F}$ -re $A \cap B \in \mathcal{F}$ és ha $A \in \mathcal{F}$ és $A \subset B$, akkor $B \in \mathcal{F}$. Lássuk be, hogy
 - (a) minden filtert tartalmaz maximális filter,
 - (b) egy maximális filterre minden $A \subset \mathbb{N}$ -re $A \in \mathcal{F}$ vagy $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$ teljesül!
 - (c) létezik két "lényegesen különböző" maximális filter!
2. Mekkora lehet egy Hamel-bázis számossága?
3. Mutassuk meg, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ megszámlálható, akkor létezik A -nak nem megszámlálható sok páronként diszjunkt eltoltja!
4. Hány különböző megoldása van a $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xy) = f(x)f(y)$ függvény-egyenletnek?
5. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^k, (k \in \mathbb{N}^+)$ függvény
 - (a) előáll, mint periodikus függvények összege,
 - (b) sőt, mint $k + 1$ periodikus függvény összege,
 - (c) de nem áll elő mint k periodikus függvény összege!
6. Létezik-e $\mathbb{R}$ -nek nem megszámlálható, zárt, $\mathbb{Q}$ -felett lineárisan független elemekből álló részhalmaza?
7. Legyen $A \subset \mathbb{R}$. I és II a következő játékot játsszák: I mond egy $[a_0, b_0]$ intervallumot, erre II mond egy $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$, majd I mond egy $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ intervallumot stb. I nyer, ha $\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] \subset A$, egyébként II a győztes. Igazoljuk, hogy II -nek pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha A első kategóriájú halmaz (azaz megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniója)!
8. Létezik-e U univerzális F_σ halmaz, azaz $\mathbb{R}^2$ egy olyan részhalmaza, amely megszámlálható sok zárt halmaz uniója, és minden $A \subset \mathbb{R}$ -re, ha A megszámlálható sok zárt uniója, akkor létezik x , hogy $A = U_x (= \{y : (x, y) \in A\})$?
9. (Beadható) Igazoljuk, hogy a pozitív valós számok halmaza felbontható két diszjunkt, nemüres, összeadásra zárt részre!