

Halmazelmélet Gyakorlat

2013. április 3.

1. Legyen $(P, \leq)$ kényszerképzet, melynek elemei az $f : \text{dom}(f) \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ véges értelmezési tartományú függvények, a rendezés pedig a kiterjesztésből kapható: $f \leq g \iff f|_{\text{dom}(g)} = g$. Gondoljuk meg, hogy egy minden $D \subset P$ sűrűt metsző $\mathcal{F}$ filter $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ráképezést adna meg!
2. Adott 13 súly úgy, hogy bármely 12 felbontható két azonos összsúlyú hatosra. Igaz-e, hogy ekkor mindegyik egyenlő súlyú?
3. Igazoljuk, hogy létezik $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ összegtartó bijekció! Hány különböző adható meg?
4. Felbontható-e $\mathbb{R}^+$ két diszjunkt, összeadásra zárt halmazra?
5. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $\mathcal{U}$ ultrafilter $\mathbb{N}$ -en és egy (a_n) nem-negatív számokból álló 0-hoz konvergáló sorozat, hogy ha $A \in \mathcal{U}$ akkor

$$\sum_{n \in A} a_n = \infty.$$

6. Hány különböző ultrafilter adható meg $\mathbb{N}$ -en?
7. Bizonyítsuk be, hogy minden $A \subset \mathbb{R}$

(a) F_σ

(b) Borel

halmazhoz létezik olyan X lengyel tér és $B \subset X \times \mathbb{R}$ zárt halmaz, hogy $A = \text{proj}_{\mathbb{R}}(B)$! Választható-e X $\mathbb{R}$ -nek?